Su un modello conservativo di tipo Penrose-Fife con condizioni di Neumann

Gianni Gilardi
Dipartimento di Matematica "F. Casorati"
Università di Pavia, Via Ferrata 1, 27100 Pavia, Italy
E–mail: gilardi@dimat.unipv.it

Elisabetta Rocca
Dipartimento di Matematica "F. Casorati"
Università di Pavia, Via Ferrata 1, 27100 Pavia, Italy
E–mail: rocca@dimat.unipv.it

Sunto. Viene considerata una classe di modelli di transizione di fase di tipo Penrose-Fife. La legge di flusso di calore ha comportamenti opportuni al tendere a zero e a infinito della temperatura assoluta e la dinamica di fase obbedisce a un'equazione di tipo Cahn–Hilliard. Per la temperatura si considerano condizioni del tipo di Neumann. Si osserva che la positività della temperatura può essere violata senza ipotesi di tipo segno sulle sorgenti e si dimostra un risultato di buona positura in ipotesi di positività della loro media.

Abstract. We deal with a class of Penrose-Fife type phase field models for phase transitions. Suitable assumptions on the behaviour of the heat flux as the absolute temperature tends to zero and to infinity are considered and the phase dynamics is ruled by a Cahn–Hilliard type equation. We deal with boundary conditions of Neumann type for the temperature. We observe that positiveness of temperature can fail without any sign condition on the source terms and we prove a well-posedness result assuming their mean value to be positive.

1. Introduzione

Un materiale che occupa una regione $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ è soggetto a transizioni di fase. Le variabili fisiche che intervengono nelle equazioni di evoluzione che descrivono il fenomeno sono la temperatura assoluta ϑ e il parametro d'ordine χ, i cui valori dicono quanto delle due fasi è presente in ogni punto di Ω e in ogni istante $t \geq 0$. Il modello è di tipo conservativo nel senso che l'integrale di χ su Ω rimane constante. Le equazioni che prendiamo in esame e che fanno intervenire una variabile ausiliaria w, il cosiddetto potenziale chimico, sono le seguenti:

$$\partial_t\big(\vartheta + \lambda\chi\big) - \Delta\alpha(\vartheta) = g \tag{1.1}$$

$$\partial_t \chi - \Delta w = 0 \tag{1.2}$$

$$w = -\Delta\chi + \beta(\chi) + \sigma_0'(\chi) - \frac{\lambda}{\vartheta_c} + \frac{\lambda}{\vartheta}\,. \tag{1.3}$$

Nelle (1.1–3) λ è il calore latente di fusione, ϑ_c è la temperatura critica di transizione di fase, α, β e σ_0 sono funzioni costitutive e g è un termine di sorgente. Più in generale β può essere un grafo massimale monotono in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, nel qual caso la (1.3) deve essere interpretata come un'inclusione differenziale. L'equazione (1.1) descrive il bilancio dell'energia, potendo infatti essere letta come

$$\partial_t\bigl(\vartheta + \lambda\chi\bigr) + \operatorname{div}\mathbf{q} = g \qquad \text{ove} \qquad \mathbf{q} = -\nabla\alpha(\vartheta) \tag{1.4}$$

e un punto importante sta nella scelta della funzione α. Rimandando alle introduzioni e ai riferimenti dei lavori riportati nella bibliografia per quanto riguarda le motivazioni modellistiche e lo stato dell'arte, noi consideriamo classi di leggi di flusso vicine a quelle studiate nei lavori [5, 6, 7, 8 e 9] e supponiamo α strettamente crescente e concava, con $\alpha(\vartheta) \approx -1/\vartheta$ e $\alpha(\vartheta) \approx \vartheta^d$ per ϑ tendente a 0 e a $+\infty$ rispettivamente, ove $0 < d \le 1$. Le equazioni (1.2–3) forniscono una versione generalizzata dell'equazione di Cahn–Hilliard e ricalcano il modello di Penrose–Fife (consistente con il secondo principio della termodinamica) introdotto in [14].

Per quanto riguarda le condizioni al contorno, consideriamo condizioni di Neumann per le tre variabili χ, w e $u := \alpha(\vartheta)$. Precisamente

$$\partial_n\chi = \partial_n w = 0 \qquad \text{e} \qquad \partial_n u = h \tag{1.5}$$

ove ∂_n è l'operatore di derivata normale esterna sulla frontiera Γ di Ω e h è una funzione assegnata. Infine vengono date condizioni iniziali su ϑ e χ.

Se la dimostrazione di un risultato di unicità in ipotesi naturali su dati e soluzione può essere ottenuto riprendendo il Paragrafo 6 di [9] praticamente senza modifiche, l'esistenza di soluzioni non è affatto immediata. La ragione sta nella minor coercività data su u dalle condizioni di Neumann rispetto a quanto avviene nel caso delle condizioni di terzo tipo $\partial_n u + \gamma u = h$, ove γ è una costante positiva, considerate in [9] (o nel caso delle condizioni di Dirichlet, che pure possono essere trattate senza eccessive difficoltà). Già il caso non conservativo studiato in [5] ha dato qualche problema, tanto è vero che si è dovuta imporre una condizione restrittiva su β per arrivare a un risultato di esistenza per il problema di Neumann. Tanto nel caso non conservativo quanto in quello conservativo qui considerato il punto chiave sta nelle stime a priori sulle soluzioni di opportuni problemi approssimati, stime che sono essenziali per il passaggio al limite nelle nonlinearità ma che sono difficili da ottenere in ipotesi abbastanza generali sulla struttura delle equazioni. Si intuisce subito, infatti, che la (1.1) fornisce una stima a priori formale per ∇u ma non per la norma di u in $H^1(\Omega)$, per cui occorre stimare la media di u, strettamente legata, data la scelta di α, alla media di $1/\vartheta$. Nel caso considerato in [5] le equazioni (1.2–3) sono sostituite dall'equazione del secondo ordine

$$\partial_t\chi - \Delta\chi + \beta(\chi) + \sigma_0'(\chi) - \frac{\lambda}{\vartheta_c} + \frac{\lambda}{\vartheta} = 0$$

che consente di ricavare la media di $1/\vartheta$ in modo più diretto. Nel caso in esame, invece, la situazione è visibilmente più complessa e, anzi, il problema non è ben posto. La ragione vera sta nel fatto che, nonostante il problema sia evolutivo, le condizioni di Neumann sono troppo deboli e non riescono a garantire, in generale, la positività della temperatura. Infatti, se si integrano le due equazioni (1.1–2) e si usano le condizioni al bordo (1.5), si trovano immediatamente le identità

$$\partial_t \int_\Omega \vartheta(x,t)\,dx = \int_\Omega g(x,t)\,dx + \int_\Gamma h(x,t)\,dS \qquad \text{e} \qquad \partial_t \int_\Omega \chi(x,t)\,dx = 0.$$

Se la seconda dice che la media di χ rimane costante, cioè che il modello è di tipo conservativo, la prima fornisce l'evoluzione della media di ϑ

$$\int_\Omega \vartheta(x,t)\,dx = \int_\Omega \vartheta(x,0)\,dx + \int_0^t \left(\int_\Omega g(x,\tau)\,dx + \int_\Gamma h(x,\tau)\,dS \right) d\tau$$

e risulta del tutto ovvio che, senza ipotesi di tipo segno su g e h, la temperatura potrà mantenersi positiva al più per tempi piccoli. Noi supponiamo allora che

$$\int_\Omega g(x,t)\,dx + \int_\Gamma h(x,t)\,dS \ge 0$$

in ogni istante dell'intervallo di tempo in cui il fenomeno è considerato e dimostriamo un teorema di esistenza della soluzione globale. Tale ipotesi generalizza quella di media nulla delle sorgenti, e a maggior ragione quella di sorgenti identicamente nulle. Queste condizioni sono state utilizzate, sempre nel caso di condizioni di Neumann, per lo studio di equazioni vicine a quelle che intendiamo trattare (v. [10] e [15]).

Nel resto del lavoro descriviamo dapprima il problema con precisione, elenchiamo le nostre ipotesi e enunciamo i nostri risultati di buona positura. Nel paragrafo successivo ci occupiamo essenzialmente della dimostrazione dell'esistenza della soluzione, derivando le stime a priori fondamentali, ma procediamo formalmente. Tuttavia forniamo anche indicazioni sufficientemente precise su come adattare il discorso fatto e ottenere una dimostrazione completamente rigorosa.

2. Il problema matematico

In questo paragrafo descriviamo il problema con maggior precisione ed enunciamo i nostri risultati. Siccome faremo spesso riferimento al lavoro [9], ne conserviamo le notazioni. Iniziamo dalle ipotesi di struttura.

Sono date le costanti positive λ, ϑ_c, C_0 e C_∞ e le tre funzioni $\alpha \in C^1(0,+\infty)$, $\widehat{\beta} : \mathbb{R} \to (-\infty,+\infty]$ e $\sigma_0 \in C^1(\mathbb{R})$, sulle quali facciamo le ipotesi seguenti:

$$\alpha \text{ è strettamente crescente e concava e } \alpha(1) = 0 \tag{2.1}$$

$$r^2 \alpha'(r) = C_0 + O(r^2) \quad \text{per } r \searrow 0 \tag{2.2}$$

$$r^{2q} \alpha'(r) = C_\infty + o(1) \quad \text{per } r \nearrow +\infty \qquad \text{con} \quad 0 \le q < 1/2 \tag{2.3}$$

$$\widehat{\beta} \text{ è convessa, propria, inferiormente semicontinua, non negativa} \tag{2.4}$$

$$\sigma_0' \text{ è lipschitziana.} \tag{2.5}$$

Introduciamo il sottodifferenziale

$$\beta := \partial\widehat{\beta} \tag{2.6}$$

che è un grafo massimale monotono in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Per quanto riguarda Ω , supponiamo che esso sia un aperto limitato e connesso di $\mathbb{R}^3$ con bordo Γ di classe C^2 . Introduciamo gli spazi funzionali

$$H := L^2(\Omega), \quad V := H^1(\Omega), \quad \text{e} \quad W := \bigl\{ v \in H^2(\Omega) : \ \partial_n v = 0 \bigr\} \, . \tag{2.7}$$

Nel seguito ci riferiamo alla terna hilbertiana (V,H,V') ottenuta identificando H a un sottospazio di V' nel modo abituale. Usiamo il simbolo $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ per denotare la dualità fra V' e V e notiamo che $\langle u,v\rangle = (u,v)$ per ogni $u\in H$ e $v\in V$, ove $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ è il prodotto scalare di H . Per semplicità denotiamo con $\|\cdot\|_H$ la norma in H e in ogni sua potenza e scriviamo, ad esempio, $L^2(0,T;H)$ anche per ogni sua potenza. Il simbolo $\|\cdot\|_{V'}$ denota poi la norma in V' , duale della norma naturale $\|\cdot\|_V$ di V . Introduciamo infine l'operatore $B\in\mathcal{L}(V;V')$ mediante la formula

$$\langle Bu,v\rangle = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v \qquad \text{per } \ u,v\in V \tag{2.8}$$

e la media (generalizzata)

$$v_\Omega := \frac{1}{|\Omega|}\,\langle v,1\rangle \qquad \text{per } \ v\in V' \tag{2.9}$$

e osserviamo che vale la disuguaglianza di Poincaré

$$\|v\|_V^2 \le C_p \left(\|\nabla v\|_H^2 + v_\Omega^2 \right) \qquad \text{per ogni } \ v\in V \tag{2.10}$$

ove C_p è una costante positiva che dipende solo da Ω .

Per quanto riguarda i dati del problema che intendiamo studiare, supponiamo assegnate quattro funzioni g , h , ϑ_0 e χ_0 verificanti

$$g\in L^2(Q) \quad \text{e} \quad h\in L^\infty(0,T;L^{q_\bullet}(\Gamma)) \tag{2.11}$$

$$\vartheta_0\in L^\infty(\Omega), \quad \vartheta_0>0 \quad \text{q.o. in } \Omega \quad \text{e} \quad 1/\vartheta_0\in L^\infty(\Omega) \tag{2.12}$$

$$\chi_0\in H^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \widehat{\beta}(\chi_0)\in L^1(\Omega) \tag{2.13}$$

$$\text{la media } m_0 \text{ di } \chi_0 \text{ è interna all'intervallo } D(\beta) \tag{2.14}$$

dove $q_\bullet$ è definito da $1/q_\bullet = 3(1-2q)/4$ e $D(\beta)$ è il dominio (effettivo) di β . Essendo $q_\bullet \ge 4/3$, il Teorema 4.2 di [12] assicura che la formula

$$\langle f(t),v\rangle := \int_\Omega g(t)v + \int_\Gamma h(t)v \quad \text{per q.o. } \ t>0 \ \text{ e } \ v\in V \tag{2.15}$$

ha senso e fornisce $f \in L^2(0,T;V')$. Allora il nostro problema consiste nel trovare una cinquina $(\vartheta, \chi, u, w, \xi)$ verificante le condizioni di regolarità

$$\vartheta \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;W^{1,q_*}(\Omega)) \cap H^1(0,T;V') \tag{2.16}$$
$$\vartheta > 0 \quad \text{q.o. in } Q, \quad 1/\vartheta \in L^1(0,T;V) \quad \text{e} \quad |\nabla(1/\vartheta)| \in L^2(Q) \tag{2.17}$$
$$\vartheta^{1-q} \in L^1(0,T;V) \quad \text{e} \quad |\nabla \vartheta^{1-q}| \in L^2(Q) \tag{2.18}$$
$$\chi \in L^2(0,T;W) \cap L^\infty(0,T;V) \cap H^1(0,T;V') \tag{2.19}$$
$$u \in L^1(0,T;V) \quad \text{e} \quad |\nabla u| \in L^2(Q) \tag{2.20}$$
$$w \in L^1(0,T;V), \quad |\nabla w| \in L^2(Q) \quad \text{e} \quad \xi \in L^2(Q) \tag{2.21}$$

e le equazioni

$$\partial_t\big(\vartheta(t) + \lambda\chi(t)\big) + Bu(t) = f(t) \quad \text{per q.o. } t \in (0,T) \tag{2.22}$$
$$u = \alpha(\vartheta) \quad \text{q.o. in } Q \tag{2.23}$$
$$\partial_t \chi(t) + Bw(t) = 0 \quad \text{per q.o. } t \in (0,T) \tag{2.24}$$
$$w(t) = B\chi(t) + \xi(t) + \sigma'(\chi(t)) + \lambda/\vartheta(t) \quad \text{per q.o. } t \in (0,T) \tag{2.25}$$
$$\xi \in \beta(\chi) \quad \text{q.o. in } Q \tag{2.26}$$
$$\vartheta(0) = \vartheta_0 \qquad \text{e} \qquad \chi(0) = \chi_0 \tag{2.27}$$

dove $q_* = 2/(q+1)$, $Q = \Omega \times (0,T)$ e $\sigma(r) := \sigma_0(r) - \lambda r/\vartheta_c$ per $r \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.1. *Valgano* (2.1–8) *e* (2.11–14) *e si definisca* f *tramite la* (2.15). *Allora due soluzioni qualunque del problema* (2.22–27) *verificanti le condizioni* (2.16–21) *hanno le stesse componenti* ϑ , χ *e* u . ∎

Ribadiamo che senza ulteriori condizioni sui dati non è garantita la positività della temperatura, per cui il problema (2.22–27), così come è stato posto, cioè con le condizioni (2.16–21), può non avere soluzione.

Teorema 2.2. *Valgano* (2.1–8) *e* (2.11–14) *e si definisca* f *tramite la* (2.15). *Con la notazione* (2.9) *si supponga che*

$$f_\Omega \geq 0 \quad \textit{per q.o. } t \in (0,T)\,. \tag{2.28}$$

Allora esiste una soluzione del problema (2.22–27) *verificante le condizioni* (2.16–21). ∎

Come è stato detto nell'Introduzione, l'unicità si dimostra come nel lavoro [9]. Infatti, nonostante le ipotesi di regolarità sulla soluzione siano leggermente diverse così come le condizioni al bordo, si possono ripetere gli stessi calcoli passo passo. Nei seguito ci occupiamo allora solo di questioni di esistenza.

3. Esistenza

In questo paragrafo diamo la traccia della dimostrazione dell'esistenza della soluzione, supponendo senz'altro $\lambda = 1$ senza perdita di generalità. Osserviamo fin d'ora, che $\sigma' = \sigma_0' - 1/\vartheta_c$ è lipschitziana grazie alla (2.5).

Il metodo consiste nel trovare stime a priori sulle soluzioni di un problema approssimato e di passare al limite usando classici risultati di compattezza e di monotonia. Il problema approssimato può essere quello scritto di seguito (oppure un problema ulteriormente regolarizzato, analogo al problema (3.6–9) di [9])

$$\partial_t\bigl(\varepsilon u(t) + \vartheta(t) + \chi(t)\bigr) + A_\varepsilon u(t) = f_\varepsilon(t) \quad \text{per q.o. } t \in (0,T) \tag{3.1}$$

$$u = \alpha(\vartheta) \quad \text{q.o. in } Q \tag{3.2}$$

$$\partial_t \chi(t) + Bw(t) = 0 \quad \text{per q.o. } t \in (0,T) \tag{3.3}$$

$$w(t) = \varepsilon\partial_t\chi(t) + B\chi(t) + \xi(t) + \sigma'(\chi(t)) + 1/\vartheta(t) \quad \text{per q.o. } t \in (0,T) \tag{3.4}$$

$$\xi = \beta_\varepsilon(\chi) \quad \text{q.o. in } Q \tag{3.5}$$

$$\vartheta(0) = \vartheta_0 \qquad \text{e} \qquad \chi(0) = \chi_{0\varepsilon} \tag{3.6}$$

ove β_ε è la regolarizzata di Yosida di β, i dati f_ε e $\chi_{0\varepsilon}$ sono approssimazioni opportune di f e di χ_0 e $A_\varepsilon \in \mathcal{L}(V, V')$ è definito dalla formula

$$\langle A_\varepsilon u, v\rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \varepsilon \int_\Gamma uv \qquad \text{per } u, v \in V\,.$$

Del problema (3.1–6) (così come di quello ulteriormente regolarizzato), che corrisponde a una condizione di terzo tipo per u, è già provata in [9] la buona positura in una classe un po' più ristretta di quella data dalle condizioni (2.16–21). In particolare la soluzione del problema approssimato è abbastanza regolare da giustificare l'utilizzo delle funzioni test adatte alla deduzione delle stime a priori necessarie per poter passare al limite. Tuttavia preferiamo limitarci a dimostrare stime formali direttamente sulla soluzione del problema (2.22–27), immaginando che essa e i dati siano regolari quanto basta, sia per non appesantire troppo il lavoro, sia perché i calcoli che faremo lasciano comunque intendere chiaramente quale debba essere la procedura completamente rigorosa.

Nelle dimostrazioni delle stime a priori, per semplicità, usiamo la convenzione che ora illustriamo. Il simbolo c minuscolo denoterà diverse costanti positive che dipendono solo da Ω, T, dalle ipotesi generali di struttura e dalle norme dei dati (in particolare non dalla soluzione) e che possono essere diverse anche nella stessa catena di uguaglianze e disuguaglianze. Al contrario, il carattere C maiuscolo con indici denoterà costanti positive precise (sempre indipendenti dalla soluzione), ad esempio introdotte in una formula citata, come nel caso della costante di Poincaré C_p che compare nella (2.10).

Uno strumento essenziale per la scelta delle funzioni test è l'operatore $\mathcal{N}$, che ora introduciamo e che inverte parzialmente l'operatore B. Infatti B non è iniettivo, ma è iniettiva la sua restrizione B_0 al sottospazio V_0 di V costituito dalle funzioni a media nulla. L'immagine di B_0 è inoltre il sottospazio V_0' di V' costituito dai funzionali la cui media (generalizzata) è nulla. Denotiamo allora con $\mathcal{N}$ l'inverso di B_0, che dunque opera da V_0' in V_0 in modo lineare e continuo.

Notiamo in particolare che $\partial_t \chi$ assume valori in V_0', come mostra chiaramente la (2.24), per cui $\mathcal{N}\partial_t\chi$ ha senso. La stessa osservazione implica che

$$\int_\Omega \chi(t) = \int_\Omega \chi_0 \qquad \text{per ogni } t > 0 \tag{3.7}$$

cioè che χ conserva la sua media nel tempo, come è già stato osservato a livello informale. Ancora, prendendo la costante $1/|\Omega|$ come funzione test nella (2.22), otteniamo

$$\partial_t \vartheta_\Omega = f_\Omega \quad \text{q.o. in } (0,T)\,, \text{ da cui } \quad \vartheta_\Omega(t) = \vartheta_{0\Omega} + \int_0^t f_\Omega(s)\,ds. \tag{3.8}$$

Osserviamo infine che le ipotesi (2.2–3) implicano le disuguaglianze

$$r^2\alpha'(r) \ge C_1, \quad r^{2q}\alpha'(r) \ge C_1 \quad \text{e} \quad \alpha(r) \le C_2(1+r) \quad \text{per ogni } r > 0\,. \tag{3.9}$$

Prima stima. Scriviamo le equazioni (2.22), (2.24) e (2.25) all'istante $t = s$ e usiamo $(1/\vartheta)_\Omega(s) - 1/\vartheta(s) + \eta(u(s) - u_\Omega(s))$, $\mathcal{N}\partial_t\chi(s)$, e $-\partial_t\chi(s)$ come rispettive funzioni test, ove $\eta > 0$ verrà fissato in seguito. Quindi integriamo su $(0,t)$ e sommiamo membro a membro le tre uguaglianze ottenute. Notato che gli integrali di $\partial_t\chi/\vartheta$ si cancellano a vicenda e definita la funzione nonnegativa $\widehat{\alpha}$ mediante la formula

$$\widehat{\alpha}(r) := \int_1^r \alpha(r')\,dr' \quad \text{per } r > 0 \tag{3.10}$$

abbiamo facilmente

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \bigl(\vartheta(t) - 1 - \ln\vartheta(t)\bigr) + \eta \int_\Omega \widehat{\alpha}(\vartheta(t)) + \int_{Q_t} \nabla u \cdot \nabla(-1/\vartheta) \\
&\quad + \eta \int_{Q_t} |\nabla u|^2 + \int_0^t \langle \partial_t\chi(s), \mathcal{N}\partial_t\chi(s)\rangle\,ds + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\chi(t)|^2 + \int_\Omega \widehat{\beta}(\chi(t)) \\
&= \int_\Omega \bigl(\vartheta_0 - 1 - \ln\vartheta_0\bigr) + \eta\int_\Omega \widehat{\alpha}(\vartheta_0) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\chi_0|^2 + \int_\Omega \widehat{\beta}(\chi_0) \\
&\quad + \int_{Q_t} \partial_t\vartheta(1 - 1/\vartheta)_\Omega + \eta\int_{Q_t} \partial_t\vartheta\, u_\Omega - \int_{Q_t} \partial_t\chi\bigl((1/\vartheta)_\Omega + \eta(u - u_\Omega)\bigr) \\
&\quad + \int_0^t \langle f(s), (1/\vartheta)_\Omega(s) - 1/\vartheta(s) + \eta(u(s) - u_\Omega(s))\rangle\,ds - \int_{Q_t} \sigma'(\chi)\partial_t\chi.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Ora, la prima delle (3.9) fornisce

$$\int_{Q_t} \nabla u \cdot \nabla(-1/\vartheta) = \int_{Q_t} \bigl(\alpha'(\vartheta)/\vartheta^2\bigr)|\nabla\vartheta|^2 \ge C_1 \int_{Q_t} |\nabla(1/\vartheta)|^2\,.$$

D'altra parte la disuguaglianza di Poincaré (2.10) e il fatto che $(\partial_t\chi)_\Omega = 0$ implicano che

$$\int_0^t \langle \partial_t\chi(s), \mathcal{N}\partial_t\chi(s)\rangle\,ds \ge \frac{1}{C_p}\int_0^t \|\partial_t\chi(s)\|_{V'}^2\,ds$$

come si può dimostrare facilmente. Passiamo al secondo membro. Tutti gli integrali su Ω sono quantità note. Maggioriamo ora i due integrali successivi usando l'ipotesi fondamentale (2.28). Riguardo al primo abbiamo

$$\begin{aligned}&\int_{Q_t} \partial_t\vartheta(1-1/\vartheta)_\Omega = |\Omega| \int_0^t (\partial_t\vartheta)_\Omega(s)(1-(1/\vartheta)_\Omega(s))\,ds\\ &= |\Omega| \int_0^t f_\Omega(s)\bigl(1-(1/\vartheta)_\Omega(s)\bigr)\,ds \le |\Omega| \int_0^t f_\Omega(s)\,ds \le c\end{aligned}$$

grazie alle (3.8), (2.28), alla disuguaglianza $1-1/\vartheta_\Omega \le 1$ che segue dalla positività di ϑ e al fatto che $f\in L^2(0,T;V')$. Le stesse condizioni consentono di stimare facilmente anche il secondo integrale. Tenendo conto anche della terza delle (3.9), abbiamo infatti

$$\eta \int_{Q_t} (\partial_t\vartheta)u_\Omega = \eta|\Omega| \int_0^t f_\Omega(s)u_\Omega(s)\,ds \le \eta|\Omega|C_2 \int_0^t f_\Omega(s)(1+\vartheta_\Omega(s))\,ds \le \eta c.$$

Per trattare il termine successivo ricordiamo che $\partial_t\chi$ ha media nulla e abbiamo

$$\begin{aligned}&-\int_{Q_t} \partial_t\chi\bigl((1/\vartheta)_\Omega + \eta(u-u_\Omega)\bigr) = -\eta \int_{Q_t} \partial_t\chi(u-u_\Omega)\\ &\le \frac{\eta}{4C_p} \int_0^t \|u(s)-u_\Omega(s)\|_V^2\,ds + \eta C_p \int_0^t \|\partial_t\chi(s)\|_{V'}^2\,ds\\ &\le \frac{\eta}{4} \int_{Q_t} |\nabla u|^2 + \eta C_p \int_0^t \|\partial_t\chi(s)\|_{V'}^2\,ds\end{aligned}$$

grazie alla disuguaglianza di Poincaré (2.10). Sempre per la (2.10) abbiamo

$$\begin{aligned}&\int_0^t \langle f(s), u(s)-u_\Omega(s)\rangle\,ds \le \frac{\eta}{4C_p} \int_0^t \|u(s)-u_\Omega(s)\|_V^2\,ds + \frac{c}{\eta} \int_0^t \|f(s)\|_{V'}^2\,ds\\ &\le \frac{\eta}{4} \int_{Q_t} |\nabla u|^2 + \frac{c}{\eta} \int_0^t \|f(s)\|_{V'}^2\,ds\end{aligned}$$

e procedendo analogamente per il termine contenente $1/\vartheta$ deduciamo

$$\begin{aligned}&\int_0^t \langle f(s), (1/\vartheta)_\Omega(s) - 1/\vartheta(s) + \eta(u_\Omega(s)-u(s))\rangle\,ds\\ &\le \frac{C_1}{2} \int_0^t |\nabla(1/\vartheta)|^2\,ds + \frac{\eta}{4} \int_{Q_t} |\nabla u|^2 + c(1+1/\eta) \int_0^t \|f(s)\|_{V'}^2\,ds\,.\end{aligned}$$

Siccome σ' è lipschitziana come abbiamo già osservato, abbiamo infine

$$\begin{aligned}&-\int_{Q_t} \sigma'(\chi)\partial_t\chi \le \frac{1}{4C_p} \int_0^t \|\partial_t\chi(s)\|_{V'}^2\,ds + C_p \int_0^t \|\sigma'(\chi(s))\|_V^2\,ds\\ &\le \frac{1}{4C_p} \int_0^t \|\partial_t\chi(s)\|_{V'}^2\,ds + C_pC_\sigma \int_{Q_t} (1+|\nabla\chi|^2+|\chi|^2)\end{aligned}$$

ove C_σ dipende solo dalle ipotesi di struttura. Combinando ora la (3.11) con tutte le disuguaglianze ottenute e scegliendo $\eta := 1/(4C_p^2)$, deduciamo la disuguaglianza

$$\int_\Omega \Phi(\vartheta(t),\chi(t),\nabla\chi(t)) + \frac{C_1}{2}\int_{Q_t} |\nabla(1/\vartheta)|^2 + C_3\int_{Q_t}|\nabla u|^2 + C_3\int_0^t \|\partial_t\chi(s)\|_{V'}^2\,ds$$
$$\le c + c\int_{Q_t}(|\nabla\chi|^2+|\chi|^2) \tag{3.12}$$

nella quale abbiamo posto $C_3 := \min\{\eta/4, 1/(2C_p)\}$ e

$$\Phi(r,r',\mathbf{p}) := r - 1 - \ln r + C_3\widehat{\alpha}(r) + \widehat{\beta}(r') + \frac{1}{2}|\mathbf{p}|^2 \quad \text{per } r>0\,,\ r'\in\mathbb{R} \text{ e } \mathbf{p}\in\mathbb{R}^3\,.$$

Notiamo che la funzione Φ è nonnegativa e verifichiamo che alla disuguaglianza (3.12) possiamo applicare il lemma di Gronwall. La situazione, infatti, è chiara per quanto riguarda il gradiente che compare al secondo membro. Circa l'ultimo termine abbiamo

$$\int_{Q_t}|\chi|^2 \le \int_{Q_t}|\nabla\chi|^2 + c\int_0^t \|\chi(s)\|_{V'}^2\,ds$$

grazie alla compattezza dell'immersione di V in H. Inoltre, per ogni s, si ha

$$\|\chi(s)\|_{V'}^2 \le 2\,\|\chi_0\|_{V'}^2 + 2\int_0^s \|\partial_t\chi(\tau)\|_{V'}^2\,d\tau\,.$$

Il lemma di Gronwall è dunque applicabile e il primo membro della (3.12) resta stimato. D'altra parte, ricordando che m_0 è la media di χ_0 (v. (2.14)), dunque anche quella di $\chi(t)$ per la (3.7), abbiamo per quasi ogni t

$$\int_\Omega|\chi(t)|^2 \le 2\int_\Omega|\chi(t)-m_0|^2 + 2\int_\Omega m_0^2 \le 2C_p\int_\Omega|\nabla\chi(t)|^2 + 2\int_\Omega|\chi_0|^2.$$

Deduciamo dunque la stima a priori

$$\begin{aligned}&\|\vartheta\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} + \|\ln\vartheta\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} + \|\widehat{\alpha}(\vartheta)\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}\\ &+ \|u-u_\Omega\|_{L^2(0,T;V)} + \|1/\vartheta - (1/\vartheta)_\Omega\|_{L^2(0,T;V)}\\ &+ \|\widehat{\beta}(\chi)\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} + \|\chi\|_{L^\infty(0,T;V)} + \|\chi\|_{H^1(0,T;V')} \le C_4\end{aligned} \tag{3.13}$$

Stime conseguenti. Per $v\in L^2(0,T;V)$ risulta

$$\int_{Q_t}\partial_t\vartheta\,v = \int_0^t\langle f(s),v(s)\rangle\,ds - \int_{Q_t}\partial_t\chi\,v - \int_{Q_t}\nabla u\cdot\nabla v$$

e concludiamo immediatamente che

$$\|\partial_t\vartheta\|_{L^2(0,T;V')} \le c. \tag{3.14}$$

Scriviamo ora le (2.24) e (2.25) all'istante $t = s$, usiamo $\chi(s)$ e $-B\chi(s)$ come rispettive funzioni test, sommiamo e integriamo su $(0, T)$. Otteniamo

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\chi(T)|^2 + \int_Q |B\chi|^2 + \int_Q \nabla\xi \cdot \nabla\chi = \frac{1}{2}\int_\Omega |\chi_0|^2 - \int_Q \nabla\sigma'(\chi) \cdot \nabla\chi - \int_Q \nabla\chi \cdot \nabla(1/\vartheta).$$

Siccome tutti i termini al primo membro sono nonnegativi, dalla (3.13) deduciamo

$$\|B\chi\|_{L^2(Q)} \le c. \tag{3.15}$$

Scriviamo infine la (2.24) all'istante $t = s$, usiamo $w(s)$ come funzione test e integriamo su $(0, T)$. Ricordando che $\partial_t \chi$ ha media nulla otteniamo

$$\|\nabla w\|_H^2 = -\int_Q \partial_t\chi\, w = -\int_Q \partial_t\chi\,(w - w_\Omega) \le \|\partial_t\chi\|_{L^2(0,T;V')}\,\|w - w_\Omega\|_V$$

e usando la disuguaglianza di Poincaré (2.10) e la (3.13) deduciamo immediatamente

$$\int_Q |\nabla w|^2 \le c. \tag{3.16}$$

Seconda stima. Scriviamo la (2.22) all'istante $t = s$ e usiamo $\vartheta(s)$ come funzione test. Integriamo quindi su $(0, t)$. Ricordando la (2.15) e posto $\Sigma_t : \Gamma \times (0, t)$, otteniamo

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\vartheta(t)|^2 + \int_{Q_t} \nabla u \cdot \nabla\vartheta = \frac{1}{2}\int_\Omega |\vartheta_0|^2 + \int_{Q_t} g\vartheta + \int_{\Sigma_t} h\vartheta - \int_{Q_t} \partial_t\chi\,\vartheta\,.$$

I termini al primo membro sono nonnegativi. Per le (3.9) si ha precisamente

$$\int_{Q_t} \nabla u \cdot \nabla\vartheta \ge C_1 \int_{Q_t} |\nabla \ln\vartheta|^2 \quad \text{e} \quad \int_{Q_t} \nabla u \cdot \nabla\vartheta \ge \frac{C_1}{(1-q)^2}\int_{Q_t} |\nabla\vartheta^{1-q}|^2.$$

Il primo integrale su Q_t al secondo membro si tratta in modo ovvio, mentre il secondo è stimato in [5, Lemma 3.2] come segue

$$\int_{\Sigma_t} h\vartheta \le c\int_{Q_t} |\nabla u|^2 + c\int_{Q_t} |\vartheta|^2.$$

Abbiamo infine

$$\begin{aligned}
&-\int_{Q_t} \partial_t\chi\,\vartheta = \int_{Q_t} \chi\,\partial_t\vartheta - \int_\Omega \chi(t)\vartheta(t) + \int_\Omega \chi_0\vartheta_0 \\
&\le \|\chi\|_{L^2(0,T;V)}\,\|\partial_t\vartheta\|_{L^2(0,T;V')} + \frac{1}{4}\int_\Omega |\vartheta(t)|^2 + \|\chi\|^2_{L^\infty(0,T;H)} + c.
\end{aligned}$$

Combinando, usando le (3.13–14) e applicando il Lemma di Gronwall otteniamo

$$\|\vartheta\|_{L^\infty(0,T;H)} + \|\nabla \ln\vartheta\|_{L^2(Q)} + \left\|\nabla\vartheta^{1-q}\right\|_{L^2(Q)} \le c. \tag{3.17}$$

Conseguenza. Deduciamo una stima relativa alla regolarità $L^2(0,T;W^{1,q_*}(\Omega))$ che compare nella (2.16), ove, lo ricordiamo, $q_* = 2/(q+1)$. Tenendo conto della (3.8) e della disuguaglianza di Poincaré (2.10) ci basta stimare il gradiente. A questo scopo usiamo l'identità $(1-q)\nabla\vartheta = \vartheta^q \nabla\vartheta^{1-q}$. Per quasi ogni t, grazie alla disuguaglianza di Hölder, abbiamo

$$\|\nabla\vartheta(t)\|_{L^{q_*}(\Omega)} \le c\,\|\vartheta^q(t)\|_{L^{2/q}(\Omega)} \left\|\nabla\vartheta^{1-q}(t)\right\|_H = c\,\|\vartheta(t)\|_H^q \left\|\nabla\vartheta^{1-q}(t)\right\|_H .$$

Quadrando, integrando rispetto a t e usando la (3.17), otteniamo la stima voluta e concludiamo che

$$\|\vartheta\|_{L^2(0,T;W^{1,q_*}(\Omega))} \le c. \tag{3.18}$$

Terza stima. Per quasi ogni t fissato, usiamo $\mathcal{N}(\xi(t)-\xi_\Omega(t))$ e $\xi_\Omega(t)-\xi(t)$ nelle equazioni (2.24) e (2.25) rispettivamente e sommiamo membro a membro le uguaglianze ottenute. Procedendo come in [9, § 5] abbiamo

$$\int_\Omega \nabla\chi(t)\cdot\nabla\xi(t) + \int_\Omega |\xi(t)-\xi_\Omega(t)|^2 = \int_\Omega F(t)\,(\xi(t)-\xi_\Omega(t)) \tag{3.19}$$

dove abbiamo posto

$$F(t) := -\mathcal{N}\partial_t\chi(t) - \sigma'(\chi(t)) - \frac{1}{\vartheta(t)} .$$

Osserviamo ora che

$$\int_\Omega F(t)\,(\xi(t)-\xi_\Omega(t)) = \int_\Omega (F(t)-F_\Omega(t))\,(\xi(t)-\xi_\Omega(t)).$$

Siccome il primo termine della (3.19) è nonnegativo, combinando e integrando in tempo deduciamo

$$\int_{Q_t} |\xi-\xi_\Omega|^2 \le \int_{Q_t} |F-F_\Omega|^2 . \tag{3.20}$$

Osserviamo subito che

$$\|F(t)-F_\Omega(t)\|_H^2 \le c\,\|\partial_t\chi(t)\|_{V'}^2 + c\int_\Omega \bigl(1+|\chi(t)|^2+|1/\vartheta(t)-(1/\vartheta)_\Omega(t)|^2\bigr)$$

da cui anche

$$\|F-F_\Omega\|_{L^2(0,T;H)}^2 \le \|\partial_t\chi\|_{L^2(0,T;V')}^2 + c\int_Q \bigl(1+|\chi|^2+|1/\vartheta-(1/\vartheta)_\Omega|^2\bigr) . \tag{3.21}$$

Per stimare la media ξ_Ω di ξ usiamo l'ipotesi (2.14) e seguiamo l'astuta procedura introdotta in [11]. Procedendo come in [4, p. 283], dove il calcolo dettagliato può essere qui ripreso senza modifica alcuna, otteniamo

$$\int_\Omega |\xi(t)| \le c + c\int_\Omega (\xi(t)-\xi_\Omega(t))(\chi(t)-m_0).$$

Abbiamo allora

$$|\xi_\Omega(t)| \le c + c\,\|\xi(t) - \xi_\Omega(t)\|_H\,\|\chi(t) - m_0\|_H\,.$$

Quadrando e integrando in tempo deduciamo la disuguaglianza

$$\int_0^T |\xi_\Omega(s)|^2\,ds \le c + c\sup_{t\in(0,T)}\|\chi(t) - m_0\|_H^2 \int_Q |\xi - \xi_\Omega|^2$$

e, combinando con (3.20–21) e tenendo conto della (3.13), concludiamo che

$$\|\xi\|_{L^2(Q)} \le c. \tag{3.22}$$

Quarta stima. Imitiamo ora la procedura introdotta in [15, § 3] per il caso della legge di Fourier. Il tutto, però, dipende ora dal parametro q, per cui preferiamo dettagliare il calcolo. Posto per comodità $\vartheta_{q\Omega} := (\vartheta^{1-q})_\Omega$, scriviamo le (2.24) e (2.25) all'istante $t = s$, usiamo in queste le funzioni $\mathcal{N}(\vartheta_{q\Omega} - \vartheta^{1-q})$ e $\vartheta^{1-q} - \vartheta_{q\Omega}$ valutate in s come funzioni test rispettive, sommiamo e integriamo su $(0,T)$. Otteniamo

$$\int_Q \frac{\vartheta_{q\Omega} - \vartheta^{1-q}}{\vartheta} = -\int_Q \bigl(\mathcal{N}\partial_t\chi + B\chi + \xi + \sigma'(\chi)\bigr)\bigl(\vartheta_{q\Omega} - \vartheta^{1-q}\bigr)\,.$$

Usando le stime (3.13), (3.15), (3.17), (3.22) e la disuguaglianza di Poincaré (2.10) deduciamo

$$\int_Q \frac{\vartheta_{q\Omega} - \vartheta^{1-q}}{\vartheta} \le \|\mathcal{N}\partial_t\chi + B\chi + \xi + \sigma'(\chi)\|_{L^2(Q)}\,\bigl\|\vartheta_{q\Omega} - \vartheta^{1-q}\bigr\|_{L^2(Q)} \le c. \tag{3.23}$$

Stimiamo ora il primo membro dal basso. Partiamo dalla disuguaglianza di Young

$$ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'} \quad \text{per ogni } a,b>0\,,\ p,p' \in (1,+\infty)\,,\ 1/p + 1/p' = 1\,. \tag{3.24}$$

Supponendo $q > 0$ per un attimo, scegliamo $a = \vartheta^{1-q}$, $b = \vartheta_{q\Omega}^{q/(1-q)}$, $p = 1/(1-q)$ e $p' = 1/q$, inteso che le funzioni considerate sono valutate in quasi ogni x e in quasi ogni t. Otteniamo la disuguaglianza

$$\vartheta^{1-q}\,\vartheta_{q\Omega}^{q/(1-q)} \le (1-q)\vartheta + q\vartheta_{q\Omega}^{1/(1-q)}$$

valida banalmente anche nel caso $q = 0$. Moltiplicando per $-\vartheta^{-1}\vartheta_{q\Omega}^{-q/(1-q)}$ deduciamo

$$-\frac{\vartheta^{1-q}}{\vartheta} \ge -(1-q)\vartheta_{q\Omega}^{-q/(1-q)} - \frac{q\vartheta_{q\Omega}}{\vartheta}$$

da cui immediatamente

$$\frac{\vartheta_{q\Omega} - \vartheta^{1-q}}{\vartheta} \ge (1-q)\frac{\vartheta_{q\Omega}}{\vartheta} - (1-q)\vartheta_{q\Omega}^{-q/(1-q)}\,. \tag{3.25}$$

Dalla (3.13) abbiamo ora per quasi ogni t e per ogni $\delta \in (0,1)$

$$C_4 \geq \int_\Omega |\ln \vartheta(t)| \geq -\int_{\Omega \setminus \Omega_\delta(t)} \ln \vartheta(t) \geq -|\Omega \setminus \Omega_\delta(t)| \ln \delta$$

ove $\Omega_\delta(t) := \{\vartheta(t) \geq \delta\}$. Segue $|\Omega \setminus \Omega_\delta(t)| \leq -C_4/\ln \delta$ e possiamo scegliere δ in modo che $|\Omega \setminus \Omega_\delta(t)| \leq |\Omega|/2$. Con tale δ risulta $|\Omega_\delta(t)| \geq |\Omega|/2$, per cui

$$\vartheta_{q\Omega}(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \vartheta^{1-q}(t) \geq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_\delta(t)} \vartheta^{1-q}(t) \geq \frac{\delta^{1-q}}{2} .$$

Combinando con la (3.25) otteniamo

$$\int_Q \frac{\vartheta_{q\Omega} - \vartheta^{1-q}}{\vartheta} \geq (1-q)\frac{\delta^{1-q}}{2} \int_Q \frac{1}{\vartheta} - (1-q)\delta^{-q} 2^{q/(1-q)} |\Omega| T.$$

Tenendo conto della (3.23) concludiamo che

$$\|1/\vartheta\|_{L^1(Q)} \leq c. \tag{3.26}$$

Conclusione. La procedura corretta, come è stato detto all'inizio del paragrafo, consiste nell'adattare tutto ciò al problema approssimato (3.1–6). In particolare le (3.15) e (3.22) sono ben giustificate dato che ξ viene sostituito da $\beta_\varepsilon(\chi)$. Per quanto riguarda i termini ulteriori con coefficiente ε che compaiono in (3.1–6) e che si trascinano nei calcoli, si intuisce immediatamente che essi non possono recare disturbi particolari nel corso delle maggiorazioni, anche tenendo conto del fatto che l'approssimazione dei dati f e χ_0 con dati più regolari f_ε e $\chi_{0\varepsilon}$ fatta in [9] consente di stimare gli integrali che li coinvolgono con costanti indipendenti da ε . Pertanto si arriva comunque a stime a priori analoghe alle precedenti, cioè uniformi rispetto a ε , nonché a stime dei termini aggiuntivi che permettono di dedurre che questi si annulleranno al limite.

Usando, per maggior chiarezza, la notazione con l'indice ε per indicare la soluzione del problema (3.1–6), vediamo solo i punti principali relativi ai termini non lineari. Le stime ottenute consentono di dedurre le convergenze

$$\vartheta_\varepsilon \to \vartheta, \qquad \chi_\varepsilon \to \chi, \qquad u_\varepsilon - u_{\varepsilon\Omega} \to \zeta, \qquad \xi_\varepsilon \to \xi$$

in topologie deboli o forti opportune (per sottosuccessioni, ben inteso) e occorre identificare le relazioni che intercorrono fra i vari limiti. Riguardo a χ e ξ non ci sono problemi, data la ricchezza di maggiorazioni che abbiamo ottenuto. Per quanto concerne invece le temperature, serve un passo ulteriore.

Innanzi tutto si può procedere come in [6] e dimostrare, combinando le stime (3.18) e (3.14), la convergenza forte in $L^2(0,T;L^{4/3}(\Omega))$ di ϑ_ε a ϑ e la conseguente convergenza quasi ovunque. Allora, tenendo conto anche della stima sul logaritmo data dalle (3.13) e (3.17), siamo nelle condizioni di poter ripetere le argomentazioni di [15, §§ 3–4] e di dimostrare la convergenza forte in $L^1(Q)$ di $1/\vartheta_\varepsilon$. Ciò garantisce, in particolare, che il limite di $1/\vartheta_\varepsilon$ è proprio $1/\vartheta$ ed è facile dedurre quanto resta da dimostrare delle (2.17). Da queste convergenze forti segue l'analoga per u_ε . Basta infatti scrivere

$$u_\varepsilon = -C_0/\vartheta_\varepsilon + \alpha(\vartheta_\varepsilon) + C_0/\vartheta_\varepsilon$$

e osservare che le (2.2–3) implicano che la funzione $r \mapsto \alpha(r) + C_0/r$ è lipschitziana. Abbiamo dunque

$$u_\varepsilon \to u := -C_0/\vartheta + \alpha(\vartheta) + C_0/\vartheta = \alpha(\vartheta) \quad \text{fortemente in } L^1(Q) \text{ e q.o. in } Q\,.$$

Segue in particolare $u_{\varepsilon\Omega} \to u_\Omega$ fortemente in $L^1(0,T)$ e q.o. in $(0,T)$. Deduciamo che $\zeta = u - u_\Omega$, da cui le (2.20) e (2.22). Sempre la convergenza forte di $1/\vartheta_\varepsilon$ consente di passare al limite nella (3.4) e di definire w tramite la (2.25). Chiaramente, allora, valgono anche le condizioni di regolarità contenute in (2.21) e la (2.24). Vediamo infine la (2.18). Abbiamo

$$\vartheta_\varepsilon^{1-q} \to \vartheta^{1-q} \quad \text{q.o. in } Q\,.$$

D'altra parte

$$\left\|\vartheta_\varepsilon^{1-q}\right\|_{L^\infty(0,T;L^{2/(1-q)}(\Omega))} + \left\|\nabla\vartheta_\varepsilon^{1-q}\right\|_{L^2(Q)} = \|\vartheta_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H)}^{1-q} + \left\|\nabla\vartheta_\varepsilon^{1-q}\right\|_{L^2(Q)} \le c$$

Dunque ϑ^{1-q} coincide con il limite debole indotto dalla stima appena scritta e vale la seconda delle (2.18). Per ottenere anche la prima, grazie alla disugualianza di Poincaré, è sufficiente il controllo della media. Basta allora verificare che ϑ^{1-q} appartiene a $L^1(Q)$, e ciò segue subito dalla disuguaglianza

$$\vartheta^{1-q} = \vartheta^{1-q/2}(1/\vartheta)^{q/2} \le (1-q/2)\vartheta + (q/2)(1/\vartheta)$$

che a sua volta viene dalla disuguaglianza (3.24) di Young.

Bibliografia

[1] H.W. Alt, I. Pawlow: *A mathematical model of dynamics of non-isothermal phase separation*, Physica D **59** (1992) 389–416.

[2] M. Brokate, J. Sprekels: "Hysteresis and phase transitions", Appl. Math. Sci. **121**, Springer, New York, 1996.

[3] J.W. Cahn, J. Hilliard: *Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy*, J. Chem. Phys. **28** (1958), 258–267.

[4] P. Colli, G. Gilardi, M. Grasselli, G, Schimperna: *The conserved phase field system with memory*, Advances Math. Sci. Appl. **11** (2001) 265–291.

[5] P. Colli, G. Gilardi, E. Rocca, G, Schimperna: *On a Penrose-Fife phase field model with inhomogeneous Neumann boundary conditions for the temperature*, in corso di stampa su Differential Integral Equations.

[6] P. Colli, Ph. Laurençot: *Weak solutions to the Penrose–Fife phase field model for a class of admissible flux laws*, Physica D **111** (1998) 311–334.

[7] P. Colli, Ph. Laurençot, J. Sprekels: *Global solution to the Penrose-Fife phase field model with special heat flux laws*, in "Variations of Domains and Free-Boundary Problems in Solid Mechanics", P. Argoul, M. Frémond, Q.S. Nguyen (eds.), Solid Mech. Appl. 66, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999, 181–188.

[8] G. Gilardi, A. Marson: *On a Penrose–Fife type system with Dirichlet boundary conditions for the temperature*, Math. Methods Appl. Sci. **26** (2003) 1303–1325.

[9] G. Gilardi, A. Marson: *On a conserved Penrose–Fife type system*, preprint IMATI-CNR n. 15-PV (2003) 1–31.

[10] A. Ito, N. Kenmochi, M. Kubo: *Non-isothermal phase transition models with Neumann boundary conditions*, Nonlinear Anal. **53** (2003) 977–996.

[11] N. Kenmochi, M. Niezgódka, I. Pawlow: *Subdifferential operators approach to the Cahn-Hilliard equation with constrantin*, J. Differential Equations **117** (1995) 320–356.

[12] J. Nečas: "Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques", Masson, Paris, 1967.

[13] O. Penrose: *Statistical Mechanics and the kinetics of phase separation*, in "Material Instabilities in Continuum Mechanics", J. Ball (ed.), Oxford University Press, 1988, 373–394.

[14] O. Penrose, P.C. Fife: *Thermodynamically consistent models of phase field type for the kinetics of phase-transitions*, Physica D **43** (1990) 44–62.

[15] E. Rocca, G. Schimperna: *The conserved Penrose–Fife system with Fourier heat flux law*, Nonlinear Anal. **53** (2003) 1089-1100.

[16] H.E. Stanley: "Introduction to phase transitions and critical phenomena", Oxford University Press, 1987.

[17] A. Visintin: "Models of phase transitions", Boston, Birkhäuser, 1996.