

Autorizzo la pubblicazione dell'esito dello scritto on-line Firma: _____

Per ognuna delle domande verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 , se il punteggio della prima parte risulta ≥ 12 , se il punteggio della seconda parte risulta ≥ 6 , e se nell'esercizio 10 si ottengono almeno 3 punti. È comunque facoltà del docente proporre allo studente se vuole sostenere l'orale qualora lo consenta lo svolgimento della prova scritta (punteggio totale ≥ 18).

Il tempo a disposizione è 2 ore e 45 minuti.

PRIMA PARTE

1. (a) Scrivere la formula generale del polinomio di Lagrange $p_n(x)$ di grado n che interpola $n+1$ punti distinti (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, n$.

4 pt.

- (b) Determinare il polinomio interpolante di Lagrange di grado 3 che vale 1 nel nodo $x = 1$ e 0 nei nodi $x = 0, 2, 3$. _____

2. Calcolare la retta $y = ax + b$ che approssima nel senso dei minimi quadrati i 4 punti dell'esercizio precedente. _____

2 pt.

3. Dato il seguente sistema non lineare:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y - x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

2 pt.

applicare un passo del metodo di Newton a partire dal punto $\mathbf{x}^{(0)} = (0, -1)^T$.
Il risultato $\mathbf{x}^{(1)}$ vale: _____

4. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \alpha \\ 0 & 3 & 2 \\ \alpha & 2 & 2\alpha \end{bmatrix}.$$

2 pt.

Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il metodo di Jacobi converge. _____

5. Determinare la fattorizzazione LU della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

2 pt.

$L =$

$U =$

6. Dati $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, si consideri la formula di quadratura

$$\tilde{I}(f) = \alpha f(-1) + \beta f(1) + \gamma f(2)$$

2 pt.

per il calcolo dell'integrale $\int_0^2 f(x) dx$. Dire per quali valori dei parametri α, β, γ la formula ha massimo grado di precisione e quanto vale tale grado _____

7. (a) Scrivere il metodo dei Trapezi (Crank-Nicolson) per risolvere numericamente il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{3}{2} \left(\frac{y-1}{x} \right) \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

6 pt.

nel punto $x = 4$.

(b) Quanto vale la soluzione discreta in $x = 3$ usando 2 passi? _____

(c) Calcolare l'approssimazione di $y(2)$ facendo un passo del metodo di Eulero esplicito.

SECONDA PARTE

8. a) Scrivere il metodo iterativo di Jacobi per la soluzione di un sistema lineare $Ax = b$.
b) Dare delle condizioni per la sua convergenza.

3 pt.

9. Data la funzione continua $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nei nodi $x_i, i = 1, 2, \dots, 6$ descrivere il metodo per costruire la funzione $g(x) = a \sin(\pi x) + b \cos(\pi x)$ che approssima i punti $(x_i, f(x_i))$ nel senso dei minimi quadrati.

3 pt.

10. Commentare il seguente codice MatLab:

8 pt.

```
1. clc
2. matrice=input('Hai definito la matrice A? (s/n) ', 's') ;
3. if matrice=='n'
4.     disp('Assegna i valori agli elementi della matrice (riga per riga)');
5.     A=input(' ');
6. end
7. b=sum(A,2) ;
8. x0=zeros(size(b)) ;
9. disp('**** Inserire due valori per le TOLLERANZE ****')
10. toll=input('In un vettore: il primo elemento relativo al residuo e il secondo alla differenza tra
    due iterate successive ');
11. flag=menu('Menù di scelta', 'Metodo 1', 'Metodo 2', 'Altro') ;
12. if flag==1 || flag==2
13.     [x,r,d]=Metodi(A,b,x0,toll,flag) ;
14. else
15.     disp('Metodo per ora non implementato')
16.     x=x0 ;
17.     r=1 ;
18.     d=1 ;
19. end
20. format short
21. disp(['Residuo: ', num2str(r)])
22. disp(d)
23. disp(['Soluzione approssimata: ', mat2str(x)])
```