Elementi di Calcolo Scientifico per l'Ingegneria Appello 24/01/2020

Cognome: ______

Nome: ______

☐ Autorizzo la pubblicazione dell'esito dello scritto on-line Firma: SOLUZIONI

Per ciascun esercizio verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta maggiore o uguale a 18: è necessario conseguire **almeno 9** punti in ciascuna delle due parti. Il tempo globale a disposizione è di 2 ore e 45 minuti (di cui 1 ora e mezzo per la parte di Matlab).

PRIMA PARTE

1. * (a) Scrivere i polinomi caratteristici di Lagrange di grado al più 3 relativi ai nodi $\{-1, 0, 1, 2\}$. **2 + 2 pt.**

$\frac{x(x-1)(x-2)}{-6}$, $\frac{(x^2-1)(x-2)}{2}$, $\frac{x(x+1)(x-2)}{-2}$, $\frac{x(x^2-1)}{6}$

(b) Data la funzione $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \cos(\pi x)$, calcolare la retta di regressione che approssima $f(x)$ rispetto ai punti x_i, $i = 1, \ldots 4$ indicati al punto precedente.

$r(x) = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}x$

2. Approssimare l'integrale $\int_{-1}^{2} \frac{1}{1+x^2} - 6x \, dx$ con la formula dei trapezi composita suddividendo l'intervallo in tre sottointervalli di uguale ampiezza. **2 pt.**

L'integrale approssimato vale: $\frac{37}{20} - 9 = -\frac{143}{20}$

3. (a) Scrivere la generica iterata del metodo di Newton per l'approssimazione degli zeri di una funzione non lineare. **2 + 2 pt.**

______

(b) Applicare un passo del metodo di Newton per approssimare lo zero della funzione $f(x) = \log x + x - \sqrt{1+x^2}$ nell'intervallo $[1, 3]$.
Ponendo $x^{(0)} = 1$, si ottiene $x^{(1)} = \frac{2+\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}$

4. (a) Partendo dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, applicare due passi del metodo iterativo di Jacobi al sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con **2 + 2 pt.**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

si ottiene:

$x_1^{(1)} = \frac{2}{3}$ $x_2^{(1)} = -\frac{1}{3}$ $x_3^{(1)} = 0$,

$x_1^{(2)} = \frac{2}{3}$ $x_2^{(2)} = -\frac{1}{3}$ $x_3^{(2)} = -\frac{1}{3}$.

(b) Il metodo di Jacobi applicato al sistema definito al punto (a) converge? Motivare la risposta. Si perché $\rho(B_J) = \frac{1}{3} < 1$

$L_0(x) =$ * $-\frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 2x)$ $L_1(x) = \frac{x^3 - x - 2x^2 + 2}{2}$ $L_2(x) = -\frac{x}{2}(x^2 - x - 2)$

$L_3(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x$

5. Applicare un passo del metodo di Eulero Esplicito con $h = 1/2$ al seguente sistema di equazioni differenziali:

2 pt.

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) & x(0) = 1 \\ y'(t) = -x(t) + (1 - x^2(t))y(t) & y(0) = 1 \end{cases}$$

I valori approssimati di $x(1/2)$ e $y(1/2)$ valgono $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$

6. Determinare la fattorizzazione LU della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ senza pivoting.

2 pt.

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE - 24 gennaio 2020

si veda codice

7. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ e il vettore $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ scrivere un Matlab script per la risoluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ utilizzando i comandi Matlab per la fattorizzazione LU e, dopo aver verificato che le matrici L e U sono triangolari, usare il comando Matlab \ per la risoluzione dei sistemi triangolari necessari alla risoluzione del sistema lineare dato.

4 pt.

$PA = LU$

$PAx = Pb$

$L\underbrace{Ux}_{y} = Pb$

$$\begin{cases} Ly = Pb \\ Ux = y \end{cases}$$

8. Dato il seguente problema di Cauchy:

6 pt.

$$\begin{cases} y'(t) = e^{-y(t)} + \cos t \\ y(0) = 0 \qquad t > 0 \end{cases}$$

approssimare la soluzione nell'intervallo $[0,\ 2]$ mediante il metodo di Eulero Implicito (con passo $h = 0.025$): confrontare graficamente la soluzione ottenuta con quella fornita dalla funzione di Matlab *ode45*. Quali sono le differenze?

$\| u^{RK} - u^{EI} \|$

9. Si consideri la formula di quadratura definita di seguito:

8 pt.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_{app}(f) = \frac{(b-a)}{6}\left(f(a) + 2f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 2f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + f(b)\right)$$

1. Riscrivere la formula di quadratura data in forma composita denotando con M il numero di intervalli in cui si decompone l'intervallo $[a, b]$.
2. Implementare la formula di quadratura composita in un m-file di tipo *script*.
3. Determinare sperimentalmente il *grado di precisione* della formula di quadratura [1]. GRADO : 1
4. Dato l'integrale $\int_1^5 \frac{1}{x^2}\,dx$ determinare sperimentalmente *l'ordine di accuratezza* della formula di quadratura composita per $h \to 0$ rispetto all'integrale esatto, qualora gli intervalli siano tutti di uguale ampiezza h.

1 $h = \frac{b-a}{M}$; $I^c_{app} = \frac{h}{6}\sum_{i=1}^{M}\left[f(x_i) + 2f\left(\frac{3x_i + x_{i+1}}{4}\right) + 2f\left(\frac{x_i + 3x_{i+1}}{4}\right) + f_{i+1}\right)$

[1] Suggerimento: per il grado di precisione valutare la formula su polinomi di grado n crescente ($n = 0, 1, 2 \ldots$).

$= \frac{h}{6}\left[f(a) + f(b)\right] + \frac{h}{3}\sum_{i=1}^{M}\left[f\left(\frac{3x_i + x_{i+1}}{4}\right) + f\left(\frac{x_i + 3x_{i+1}}{4}\right) + \frac{h}{3}\sum_{i=2}^{M} f_i\right.$