

CALCOLO NUMERICO: Appello del 25/02/2004

Esercizio 1. Dato il parametro reale α , si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3\alpha \end{pmatrix},$$

(a) Per quali valori di α la matrice A risulta invertibile ed ammette la decomposizione di Gauss $A = LU$?

(b) Sia $A = LU$ la decomposizione di Gauss. Allora $l_{21} + l_{31}$ vale

Esercizio 2. Si consideri la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & a & a \\ a & 1/3 & 0 \\ a & 0 & 1/3 \end{pmatrix},$$

con $a > 0$ parametro reale. Il metodo di Jacobi per i sistemi lineari di matrice A è convergente se e solo se a .

Esercizio 3. Trovare a e b in modo tale che la funzione $f(x) = a\sqrt{x} + b$, approssimi i punti $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(4, 3)$, $(9, -1)$ nel senso dei minimi quadrati.

Allora $a =$ $b =$

Esercizio 4. Si consideri la seguente formula di quadratura:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx af\left(-\frac{1}{2}\right) + bf(1)$$

(a) Determinare i pesi a, b in modo che la formula sia almeno di ordine 1.

$a =$, $b =$

(b) Determinare l'ordine della formula trovata. Ordine =

Esercizio 5. Sia $P(x)$ il polinomio di grado ≤ 3 tale che

$$P(-1) = 0, \quad P(0) = 0, \quad P(1) = 0, \quad P'(1) = 1 .$$

Allora $P(2)$ vale

Esercizio 6. Dato $x^{(0)} = (2, 3)^T$, si applichi il metodo di Newton al sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2 . \end{cases}$$

Per la prima iterata $x^{(1)} = (x_1, y_1)^T$ si ha $x_1 =$, $y_1 =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$xy'(x) - 2y(x) + 2x^3 = 0 \quad (x \geq 1) \quad , \quad y(1) = 2 .$$

(a) Applicare un passo del metodo di Eulero esplicito con passo $h = 1/2$.

Il valore approssimato di $y(3/2)$ è $u_1 =$

(b) Applicare un passo del metodo dei trapezi con passo $h = 1/2$. Il valore

approssimato di $y(3/2)$ è $u_1 =$

Esercizio 8. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 2 \\ -1 & 1/2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Applicare un passo del metodo di Jacobi a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = (1, -1, 1)^T$.
Si ottiene:

$$x_1^{(1)} = \text{} , \quad x_2^{(1)} = \text{} , \quad x_3^{(1)} = \text{}$$

(b) Applicare un passo del metodo di Gauss-Seidel, sempre a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = (1, -1, 1)^T$. Si ottiene:

$$x_1^{(1)} = \text{} , \quad x_2^{(1)} = \text{} , \quad x_3^{(1)} = \text{}$$

Ogni risposta esatta vale 2 punti. Ogni risposta sbagliata oppure non data vale 0 punti. Lo scritto si intende superato se il punteggio totale ottenuto è **maggiore o uguale a 16**. Durata della prova: **2 ore**.