Cognome e Nome	Firma

CALCOLO NUMERICO: Appello del 29/06/2005

Esercizio 1. Dato il parametro reale α, si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 16 & 2 \\ \alpha & 2 & 5 \end{pmatrix} .$$

(a) Per quali valori di α la matrice A risulta invertibile ed ammette la decomposizione di Gauss $A = LU$? $\boxed{}$

(b) Per quali valori di α la matrice A ammette la decomposizione di Cholesky $A = LL^T$? $\boxed{}$

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x+3} .$$

(a) Sia $P_2(x)$ il polinomio interpolatore di Lagrange di $f(x)$, relativo ai nodi $\{-2, 1, 2\}$. Allora $P_2(-1)$ vale $\boxed{}$

(b) Sia $r(x)$ la retta di regressione per f rispetto ai nodi $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Allora $r(3)$ vale $\boxed{}$

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} , \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) Applicare un passo del metodo di Jacobi a partire da $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$. Si ottiene:

$x_1^{(1)} = \boxed{}$, $x_2^{(1)} = \boxed{}$, $x_3^{(1)} = \boxed{}$

(b) Applicare un passo del metodo di Gauss-Seidel, sempre a partire da $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$. Si ottiene:

$x_1^{(1)} = \boxed{}$, $x_2^{(1)} = \boxed{}$, $x_3^{(1)} = \boxed{}$

Esercizio 4. Applicare un passo del metodo di Newton al sistema

$$\begin{cases} 4x^2y - y^2 = 0 \\ \\ xy - 1 = 0 \ . \end{cases}$$

Partendo da $(x_0, y_0) = (1, 1)$, si ha $x_1 = \boxed{}$, $y_1 = \boxed{}$

Esercizio 5. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{2y(t)}{t+2} \\ \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

(a) Indicata con u_1^T l'approssimazione di $y(2)$ usando un passo del metodo dei trapezi con $h = 1$, si ha $u_1^T = \boxed{}$

(b) Indicata con u_2^E l'approssimazione di $y(2)$ usando due passi del metodo di Eulero esplicito con $h = 1/2$, si ha $u_2^E = \boxed{}$

Esercizio 6. Si consideri la seguente formula di quadratura:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx af\left(-\frac{1}{3}\right) + bf(1)$$

(a) Determinare i pesi a, b in modo che la formula sia almeno di ordine 1. Allora si ha: $a = \boxed{}$, $b = \boxed{}$

(b) Determinare l'ordine della formula trovata. Ordine $= \boxed{}$

Esercizio 7. Sia

$$E = \int_{-1}^{1} \Big[\sin\Big((x^2 - 1/4)\pi\Big) - 2(x^2 - 1)\Big] d\,x \ ,$$

e sia A il valore approssimato dell'integrale ottenuto usando la formula di Cavalieri-Simpson negli intervalli $[-1, 0]$, $[0, 1]$. Allora A vale $\boxed{}$

Ogni risposta esatta: 2 punti. Ogni risposta sbagliata o non data: 0 punti. Lo scritto è superato se il punteggio totale ottenuto è **maggiore o uguale a 16**. Durata della prova: **2 ore**.