Cognome e Nome	Firma

CALCOLO NUMERICO: Appello del 05/07/2004

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema differenziale

$$\begin{cases} t\,x'(t) - 5x(t) + 2\,t = 0 & x(1) = \frac{1}{2} \\ y'(t) + x(t) - 2 = 0 & y(1) = 0. \end{cases}$$

(a) Applicare due passi del metodo di Eulero esplicito con passo $h = 1$.
I valori approssimati di $x(3)$ e $y(3)$ sono $x_2 =$ ☐ e $y_2 =$ ☐

(b) Applicare un passo del metodo di Eulero implicito con passo $h = 1$.
I valori approssimati di $x(2)$ e $y(2)$ sono $x_1 =$ ☐ e $y_1 =$ ☐

Esercizio 2. Dato il parametro reale a, si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & a \end{pmatrix} .$$

(a) Per quali valori di a la matrice A risulta invertibile ed ammette la decomposizione LU ? ☐

(b) Sia $a = -1$. Effettuare la fattorizzazione di Gauss $A = LU$. Allora $u_{22} + u_{33}$ vale ☐

Esercizio 3. Si consideri la funzione

$$f(x) = \sin(\pi x).$$

(a) Sia $P_2(x)$ il polinomio interpolatore di Lagrange di $f(x)$, relativo ai nodi $\{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\}$. Allora $P_2(2)$ vale ☐

(b) Sia

$$E = \int_0^{1/2} f(x)\ dx\ .$$

Se A_{CS} è il valore approssimato di E ottenuto usando la formula di Cavalieri-Simpson, allora A_{CS} vale ☐

Esercizio 4. Dato $a > 0$, si consideri la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2a \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

(a) Il metodo di Jacobi per i sistemi lineari di matrice A è convergente se e solo se a $\boxed{}$.

(b) Il metodo di Gauss-Seidel per i sistemi lineari di matrice A è convergente se e solo se a $\boxed{}$.

(c) Sia $a = 1$. Dato il sistema $Ax = b$, con $b = (1, 0, 1)^T$, applicare un passo del metodo di Jacobi a partire da $x^{(0)} = (1, 0, 0)^T$. Si ottiene:

$x_1^{(1)} = \boxed{}$, $x_2^{(1)} = \boxed{}$, $x_3^{(1)} = \boxed{}$

Esercizio 5. Si consideri la seguente formula di quadratura:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\, dx \approx af(-1) + bf(0) + cf(1)$$

Determinare i pesi a, b, c in modo che la formula sia almeno di ordine 2.

$a = \boxed{}$, $b = \boxed{}$, $c = \boxed{}$

Esercizio 6. Dato $(x_0, y_0) = (1, 0)^T$, si applichi il metodo di Newton al sistema

$$\begin{cases} x^2 - 2y - 1 = 0 \\ \\ y^2 + x = 0 \ . \end{cases}$$

Per la prima iterata $x^{(1)} = (x_1, y_1)^T$ si ha $x_1 = \boxed{}$, $y_1 = \boxed{}$

Esercizio 7. Data la funzione $f(x) = a\cos(\pi x) + b(4x - 1)$, trovare a e b in modo tale che f approssimi i punti $(0, 1)$, $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ nel senso dei minimi quadrati. $a = \boxed{}$ $b = \boxed{}$

Ogni risposta esatta vale 2 punti. Ogni risposta sbagliata oppure non data vale 0 punti. Lo scritto si intende superato se il punteggio totale ottenuto è **maggiore o uguale a 16**. Durata della prova: **2 ore**.