

# Esercizi su: risoluzione di sistemi lineari

Anno Accademico 2002–2003

---

**Esercizio 1.** Si consideri la matrice  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 2 & 10 \\ a & 10 & 14 \end{pmatrix}$$

a) Per quali valori di  $a$  la matrice ammette la decomposizione  $LU$ ?

b) Scrivere, in funzione di  $a$ , la fattorizzazione  $LU$  di  $A$ :

$$L = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

c) Esistono valori di  $a$  per cui  $A$  ammette la decomposizione  $LL^T$ ?

---

**Esercizio 2.** Fattorizzare la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

nel prodotto  $LU$ , con  $L$  matrice triangolare inferiore con  $l_{ii} = 1$  e  $U$

matrice triangolare superiore. Si ha:

$$L = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

---

**Esercizio 3.** Sia  $A$  la matrice:  $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ , con  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ . Sapendo che

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$$

determinare  $\alpha$  e  $\beta$ . Si ha:  $\alpha = \square$ ,  $\beta = \square$

---

**Esercizio 4.** Si consideri la matrice  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Per quali valori di  $a$  la matrice ammette la decomposizione  $LU$ ?

b) Scrivere, in funzione di  $a$ , la fattorizzazione  $LU$  di  $A$ :

$$L = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

c) Esistono valori di  $a$  per cui  $A$  ammette la decomposizione  $LL^T$ ?

---

**Esercizio 5.** Si consideri il sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  e un vettore iniziale  $\mathbf{x}^0$  così definiti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 8 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Siano  $\mathbf{x}^1$  e  $\mathbf{x}^2$  le approssimazioni della soluzione  $\mathbf{x}$ , ottenute applicando un passo e due passi del metodo di Jacobi rispettivamente. Allora

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix}$$

b) Sia  $\mathbf{x}^1$  l'approssimazione ottenuta applicando un passo del metodo di Gauss Seidel.

$$\text{Allora } \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}^1 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix}$$

---

**Esercizio 6.** Applicare un passo del metodo di Gauss-Seidel al sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

partendo da  $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 1$ .

Allora si ha:  $x_1^{(1)} = \square$ ,  $x_2^{(1)} = \square$ ,  $x_3^{(1)} = \square$

---

**Esercizio 7.** Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 15 & 9 & 4 \\ 10 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

trovare la sua fattorizzazione  $LU$ , con  $L$  matrice triangolare inferiore con  $l_{11} = l_{22} = l_{33} = 1$ , e  $U$  matrice triangolare superiore.

Allora  $u_{11} + u_{22} + u_{33} = \square$

---

**Esercizio 8.** Applicare 2 passi del metodo di Jacobi al sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

partendo da  $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$ .

Allora si ha:  $x_1^{(2)} = \square$ ,  $x_2^{(2)} = \square$ ,  $x_3^{(2)} = \square$

---

**Esercizio 9.** Si consideri il sistema  $Ax = \mathbf{b}$  dove:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 5 & 26 & 11 \\ 2 & 11 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 21 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Fattorizzare la matrice  $A$  nel prodotto  $LL^T$ , con  $L$  matrice triangolare inferiore.

$$\text{Allora } L = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \quad L^T = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

b) Risolvere i sistemi  $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$  e  $L^T\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

$$\text{Allora } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix}$$

---

**Esercizio 10.** Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 12 & 2 \\ a & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad a \in \mathbf{R}$$

a) Per quali valori di  $a$  la matrice ammette la decomposizione  $LU$ ?

b) Allora la fattorizzazione  $LU$  di  $A$  è:

$$L = \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix}$$

c) La matrice  $A$  ammette la decomposizione  $LL^T$ ?

---

**Esercizio 11.** Sia  $a$  un numero reale, e sia  $A$  la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a+4 & a \\ a & a+4 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare, in funzione di  $a$ , i numeri di condizionamento  $K_\infty(A)$ ,  $K_1(A)$ ,  $K_2(A)$ . Confrontare poi, al variare di  $a \in \mathbf{R}$ , le funzioni ottenute.

b) Dire per quali valori di  $a$  la fattorizzazione di Cholewsky è applicabile alla matrice  $A$ , e calcolare tale fattorizzazione.

c) Enunciare la condizione necessaria e sufficiente per la convergenza del metodo di Jacobi ed applicarla alla matrice  $A$ , discutendo i diversi casi al variare di  $a$ .

---

**Esercizio 12.** Si consideri il sistema lineare  $Ax = b$  con

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & \alpha & 5 \end{pmatrix}$$

con  $\alpha$  e  $\beta$  parametri reali. Determinare per quali valori di  $\alpha$  e  $\beta$  i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel convergono.

---

**Esercizio 13.** Sia da risolvere il sistema  $Ax = b$ , dove  $A$  è la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -\beta \\ 0 & \gamma & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

con  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ . Dopo aver stabilito le condizioni di risolubilità del sistema:

- a) Determinare la fattorizzazione di Gauss  $A = LU$  della matrice  $A$ .
- b) Scrivere la generica iterata del metodo di Jacobi, e quella specifica per il sistema in esame.
- c) Scrivere la generica iterata del metodo di Gauss-Seidel, e quella specifica per il sistema in esame.
- d) Enunciare la condizione necessaria e sufficiente per la convergenza dei metodi iterativi di splitting, e applicarla al sistema considerato per i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel.

---

**Esercizio 14.** Sia  $\alpha$  un numero reale e si consideri la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare, quando possibile, la fattorizzazione di Cholesky.

b) Enunciare la condizione necessaria e sufficiente per la convergenza del metodo di Jacobi ed applicarla alla matrice  $A$ : tale condizione è soddisfatta  $\forall \alpha > 0$ ?

---

**Esercizio 15.** Sia data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \beta & 5 \\ 1 & 5 & \alpha \end{pmatrix}$$

con  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ .

Determinare per quali valori di  $\alpha$  e  $\beta$  la fattorizzazione di Cholewski è applicabile alla matrice  $A$  e calcolare tale fattorizzazione.

---

**Esercizio 16.** Siano  $a, b$  numeri reali, e sia  $A$  la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a & 0 \\ a & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

a) Dire per quali valori di  $a$  e  $b$  la fattorizzazione di Cholewski è applicabile alla matrice  $A$ , e calcolare tale fattorizzazione.

- b) Applicare, quando possibile, la fattorizzazione di Gauss  $A = LU$ .
- c) Nel caso  $a = b > 0$ , calcolare il numero di condizionamento  $K_2(A)$ .
- 

**Esercizio 17.** Sia da risolvere il sistema  $Ax = b$ , dove  $A$  è la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

e  $b \in \mathbf{R}^3$  un qualunque vettore dato.

- a) Dire se il metodo di Jacobi è convergente; scrivere la generica iterata del metodo, e quella specifica per il problema considerato.
- b) Dire se il metodo di Gauss-Seidel è convergente; scrivere la generica iterata del metodo, e quella specifica per il problema considerato.
- 

**Esercizio 18.** Siano  $\alpha$  e  $\beta$  numeri reali e si consideri la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & \beta \\ 2 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 5 \end{pmatrix}$$

Calcolare, quando possibile, la fattorizzazione di Cholesky. Calcolare poi  $\|A\|_2$  nel caso in cui  $A$  sia simmetrica.

---

**Esercizio 19.** Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

con  $a, b, c \in \mathbf{R}$ .

- a) Determinare per quali valori di  $a, b, c$  la matrice  $A$  è simmetrica e definita positiva.
- b) Calcolare  $\|A\|_1$ ,  $\|A\|_2$  e  $\|A\|_\infty$ .
- c) Discutere l'applicabilità e la convergenza dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel per la matrice  $A$ .

---

**Esercizio 20.** Si consideri il sistema lineare  $Ax = b$ , con

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & \alpha \\ 1 & \beta & 5 \end{pmatrix}$$

e  $\alpha, \beta$  parametri reali.

- a) Dopo aver stabilito le condizioni per la risolubilità del sistema, determinare la fattorizzazione di Gauss  $A = LU$ .
- b) Determinare i valori di  $\alpha$  e  $\beta$  affinché la fattorizzazione di Cholewsky sia applicabile alla matrice  $A$  e calcolare tale fattorizzazione.

---

**Esercizio 21.** Sia:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 17 & -4 \\ 0 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

Determinare la fattorizzazione di Cholewsky della matrice  $A$ .

---

**Esercizio 22.** Sia  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  e si consideri la sua decomposizione  $LU$ . Allora  $l_{21} + 11l_{32} + u_{23}$  vale

---

**Esercizio 23.** Sia  $\alpha > 0$  e si consideri la matrice  $A = \begin{bmatrix} \alpha & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ . Allora il metodo di Jacobi per la risoluzione dei sistemi lineari di matrice  $A$  converge se e solo se  $\alpha$  è

---

**Esercizio 24.** Si consideri il sistema lineare  $Ax = b$ , essendo  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$  e  $b = [2, 1, 1]^T$ . Si applichi il metodo di Gauss-Seidel con vettore iniziale  $x^{(0)} = [1, 1, -2]^T$ . Si indichi con  $x_2^{(1)}$  la seconda componente della prima iterata. Allora  $10x_2^{(1)}$  vale

---

**Esercizio 25.** Data  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ , si calcolino le matrici  $L$  e  $U$  della sua decomposizione  $LU$ .

---

**Esercizio 26.** Sia  $\alpha > 0$  e si consideri la matrice  $A = \begin{bmatrix} \alpha & 8 \\ 8 & 4\alpha \end{bmatrix}$ . Allora il metodo di Jacobi per la risoluzione dei sistemi lineari di matrice  $A$  converge se e solo se  $\alpha$  è

---

**Esercizio 27.** Si consideri il sistema lineare  $Ax = b$ , essendo  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$  e  $b = [-1, 1, 2]^T$ . Si applichi il metodo di Gauss-Seidel con vettore iniziale  $x^{(0)} = [1, 4, 1]^T$ . Si indichi con  $x_2^{(1)}$  la seconda componente della prima iterata. Allora  $12x_2^{(1)}$  vale

---

**Esercizio 28.** Sia  $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & \alpha & 1 \\ 4 & -2 & 8 \end{bmatrix}$ , con  $\alpha \in \mathbf{R}$ . Se ne consideri la sua decomposizione  $LU$ . Se si vuole  $l_{32} = -\frac{14}{11}$ , allora  $\alpha$  deve valere

---

**Esercizio 29.** Sia  $\alpha > 0$  e si consideri la matrice  $A = \begin{bmatrix} \alpha & 6 \\ 6 & 9\alpha \end{bmatrix}$ . Allora il metodo di Gauss-Seidel per la risoluzione dei sistemi lineari di matrice  $A$  converge se e solo se  $\alpha$  è

---

**Esercizio 30.** Si consideri il sistema lineare  $Ax = b$ , essendo  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$  e  $b = [1, 3, 1]^T$ . Si applichi il metodo di Jacobi con vettore iniziale  $x^{(0)} = [3, 2, 1]^T$ . Si indichi con  $x_j^{(1)}$  la  $j$ -esima componente della prima iterata ( $j = 1, \dots, 3$ ). Allora  $12(x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + x_3^{(1)})$  vale

