

CALCOLO NUMERICO: Appello del 27/02/2003

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x + 5}.$$

(a) Sia $P_2(x)$ il polinomio interpolatore di Lagrange di $f(x)$, relativo ai nodi $\{-2, 1, 2\}$. Allora $P_2(-1)$ vale

(b) Sia $r(x)$ la retta di regressione per f rispetto ai nodi $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Allora $r(3)$ vale

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema differenziale

$$\begin{cases} 2x'(t) + 3y(t) + 4 = 0 & x(0) = 1 \\ y'(t) + x(t) + 1 = 0 & y(0) = 0. \end{cases}$$

(a) Applicare due passi del metodo di Eulero esplicito con passo $h = 1$. I valori approssimati di $x(2)$ e $y(2)$ sono $x_2 =$ e $y_2 =$

(b) Applicare un passo del metodo dei trapezi con passo $h = 1$. I valori approssimati di $x(1)$ e $y(1)$ sono $x_1 =$ e $y_1 =$

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) Applicare un passo del metodo di Jacobi a partire da $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$. Si ottiene:

$$x_1^{(1)} = \text{, } x_2^{(1)} = \text{, } x_3^{(1)} = \text{$$

(b) Applicare un passo del metodo di Gauss-Seidel, sempre a partire da $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$. Si ottiene:

$$x_1^{(1)} = \text{, } x_2^{(1)} = \text{, } x_3^{(1)} = \text{$$

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -11 \\ 3 & -11 & 35 \end{pmatrix},$$

(a) Si consideri la fattorizzazione di Cholesky $A = LL^T$.

Allora $l_{31} + l_{32} + l_{33}$ vale

(b) Si consideri la fattorizzazione di Gauss $A = LU$. Allora $l_{32} + u_{33}$ vale

Esercizio 5. Dato il parametro reale $\alpha > 0$, si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -2 \\ 1 & \alpha & 0 \\ -2 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Per quali valori di α la matrice A risulta invertibile ed ammette la decomposizione di Gauss $A = LU$?

(b) Per quali valori di α la matrice A ammette la decomposizione di Cholesky $A = LL^T$?

Esercizio 6. Sia

$$E = \int_{-2}^2 \frac{x^2 + 2}{\cos(\pi x) + 2} dx.$$

(a) Se A_T è il valore approssimato di E ottenuto usando la formula dei trapezi negli intervalli $[-2, 0]$, $[0, 2]$, allora A_T vale

(b) Se A_{PM} è il valore approssimato di E ottenuto usando la formula del punto medio negli intervalli $[-2, 0]$, $[0, 2]$, allora A_{PM} vale

(1) Ogni risposta esatta vale 2 punti. Ogni risposta sbagliata oppure non data vale 0 punti. Lo scritto si intende superato se il punteggio totale ottenuto è **maggiore o uguale a 16**.

(2) Durata della prova: **2 ore**.
