BUSTA N. 1

Il candidato svolga uno dei temi e risolva al massimo tre degli esercizi proposti, indicando espressamente quali.

Temi

Tema 1. Diagonalizzabilità di matrici.

Tema 2. Curve immerse in $\mathbb{R}^3$.

Tema 3. Il candidato illustri in modo sintetico la teoria delle serie di potenze di una variabile, a sua scelta reale o complessa, e si soffermi con maggior dettaglio su un punto significativo.

Tema 4. Discutere la verifica delle ipotesi secondo l'impostazione frequentista dell'inferenza statistica, presentando un esempio significativo.

Tema 5. Discutere la teoria dei processi di punto soffermandosi con maggior dettaglio sul processo di Poisson.

Tema 6. Meccanica dei sistemi giroscopici.

Tema 7. Soluzione di sistemi non lineari e problemi di minimo.

Esercizi

Esercizio 1.

a) Mostrare che in un anello commutativo con unità finito ogni ideale primo è massimale.

b) Dire se questi ideali in $\mathbb{Q}[x, y]$ sono primi e/o massimali:

$$I = (x - 5, x^2 + y^2 - 27), \tag{1}$$
$$I = (x - 5), \tag{2}$$
$$I = (x - 5, x^2 + y^2 - 34). \tag{3}$$

Esercizio 2.

a) Mostrare che un'applicazione $\mathcal{C}^\infty$

$$f : S^1 \times S^1 \times S^1 \to S^3$$

ha almeno un punto critico.

b) Mostrare che ogni applicazione continua

$$f : \mathbb{R}^3 - \{p_1, p_2\} \to Y,$$

dove p_1, p_2 sono due punti distinti in $\mathbb{R}^3$ e Y è una superficie di Riemann compatta di genere $g \geq 1$, è omotopa ad una costante.

Esercizio 3. Per ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si denoti con $\mathcal{G}(f)$ l'insieme delle funzioni $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che verificano le due condizioni

$$g \text{ è non decrescente} \quad \text{e} \quad g(x) \geq f(x) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}\,.$$

Si richiede di

a) caratterizzare l'insieme $\mathcal{F}$ delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $\mathcal{G}(f) \neq \emptyset$;

b) caratterizzare il sottoinsieme di $\mathcal{F}$ costituito dalle funzioni f tali che esista $g \in \mathcal{G}(f)$ che sia anche di classe C^∞ e lipschitziana.

Esercizio 4. Data una famiglia parametrica di densità di probabilità $\{f(x, \theta), \theta \in \Theta\}$, sia $T = t(X)$ una statistica sufficiente completa per θ e sia $A = a(X)$ una statistica ancillare, la cui distribuzione non dipende da θ.

a) Si dimostri che A e T sono stocasticamente indipendenti.

b) Mostrare che se $X_1, \ldots, X_n$ è un campione casuale da una distribuzione normale $N(\mu, \sigma^2)$ con σ^2 nota, allora

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = S^2$$

sono stocasticamente indipendenti.

Esercizio 5. Sia X una variabile aleatoria esponenziale con funzione di ripartizione $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$, per $x > 0$ e $F(x) = 0$ per $x \leq 0$. Si dimostri che X gode della proprietà di assenza di memoria:

$$\Pr(X > x + u \mid X > x) = \Pr(X > u)\ .$$

Si consideri ora un sistema formato da k componenti indipendenti collegate in serie, con $n - k$ componenti di riserva. La durata di ciascuna componente, una volta inserita nel sistema, ha distribuzione F. Non appena una componente si guasta viene immediatamente sostituita da una componente di riserva, per cui il sistema non interrompe il suo funzionamento.

Sia T la durata del sistema fino all'esaurimento di tutta la riserva.

a) Si calcoli $\mathrm{E}(T)$.

b) Si calcoli la funzione di affidabilità del sistema

$$R(t) = \Pr(T > t).$$

Esercizio 6. In un piano verticale è assegnata una circonferenza di raggio R, libera di ruotare con velocità angolare costante $\omega\mathbf{e}_y$ attorno ad una retta verticale fissa posta a distanza a dal suo centro (vedi la figura nell'ultima pagina). Sulla circonferenza si muove senza attrito un punto materiale P di massa m soggetto ad un campo gravitazionale uniforme $-g\mathbf{e}_y$. Introdotti i parametri adimensionali $\alpha := a/R \in [0, 1]$, $\beta = \omega^2 R/g$ e la coordinata angolare ϑ si tracci il diagramma di stabilità relativo alle configurazioni

$\vartheta = \vartheta^*$ di equilibrio del sistema in funzione di β, per $\alpha \geq 0$ fissato, distinguendo i casi $\alpha = 0$ ed $\alpha > 0$.

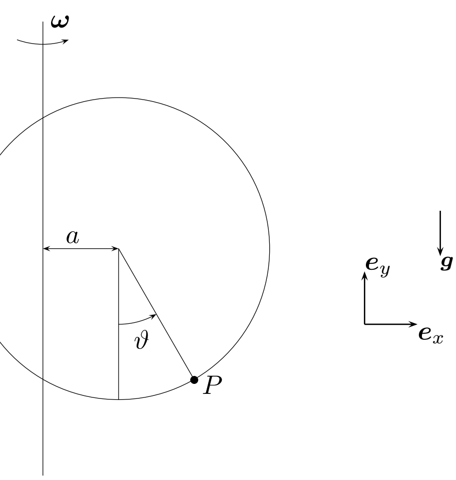
Esercizio 7. Si consideri il seguente problema agli autovalori: trovare $\lambda \in \mathbb{R}$ e una funzione $u : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ con $u \neq 0$ tali che

$$u'' + \lambda u = 0 \quad \text{in } (0,\pi) \quad \text{e} \quad u(0) = u(\pi) = 0.$$

La discretizzazione del problema mediante differenze finite conduce alla ricerca degli autovalori λ_h e degli autovettori u_h della matrice $A_h \in \mathbb{R}^{N\times N}$, essendo $h = \pi/(N+1)$, ossia

$$\text{trovare } \lambda_h \in \mathbb{R} \text{ e } u_h \in \mathbb{R}^N \text{ con } u_h \neq 0 \text{ tale che } A_h u_h = \lambda_h u_h.$$

a) Determinare autovalori ed autofunzioni del problema continuo.
b) Osservare che il vettore contenente il valore nei nodi di ciascuna autofunzione continua è autovettore del sistema lineare.
c) Trovare gli autovalori discreti λ_h.
d) Studiare la convergenza.



$\boldsymbol{\omega}$
a
ϑ
P
$\boldsymbol{e}_y$
$\boldsymbol{e}_x$
$\boldsymbol{g}$