Analisi Matematica I - 23/02/16 - Tempo a disposizione: 3h
Matricola **Cognome e Nome**

A1. Stabilire se la seguente serie converge o diverge: $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{6e^{-1/n}+1}{5n^5+6\sqrt{n}}$

A2.* Calcolare il seguente limite: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{-4n^3-2\sin n}{\sqrt{2n^6-2n^2+1}} - 3\,\frac{\ln(n+5)}{\ln n}$

A3. Stabilire se il seguente integrale diverge o converge: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{x^{1/2}}\,dx$

A4.* Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{1}{2}u''(x)+2u'(x)-6u(x)=0 \\ u(0)=0 \\ u'(0)=8 \end{cases}$$

A5. Calcolare $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{(7+3\sin x)^2}\cos x\,dx$.

A6. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $7(z^4+2)(z-7)^4=0$ (rappresentare i risultati in forma esponenziale).

A7. * Sia $f(x)=0$ per $x=0$ e $f(x)=x(2+x\sin(-2/x))$ per $x\neq 0$. Si calcoli $f'(0)$ usando la definizione di derivata.

A8.* Sia $f(x)=e^{|x^2-7x+12|}$. Determinare i punti di minimo assoluto e il punto di massimo relativo di f in $\mathbb{R}$.

A9. Calcolare il polinomio di MacLaurin di grado 2 della funzione $f(x)=-3\sqrt{1+4x^2}$.

A10. Sia u la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x)=2u(x), \\ u(3)=-5. \end{cases}$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di u nel punto di ascissa $x=3$.

B1. Se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$, allora $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f^2(x)}{g^2(x)}$ $\boxed{A}$ è uguale a $+\infty$ $\boxed{B}$ non esiste $\boxed{C}$ è uguale a 0 $\boxed{D}$ è uguale a 1.

B2.* Siano f e g due funzioni continue su $[0,1]$ tali che $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx$. Allora $\boxed{A}$ $\int_0^{1/2} f(x)\,dx = \int_0^{1/2} g(x)\,dx$ $\boxed{B}$ $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in [0,1]$ $\boxed{C}$ esistono $a, b \in [0,1]$, con $a < b$, tali che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$ $\boxed{D}$ esiste $x_0 \in [0,1]$ tale che $f(x_0) = g(x_0)$.

B3. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua. Allora $\boxed{A}$ esiste $x_0 \in (0,1)$ tale che $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in (0,1)$ $\boxed{B}$ esistono almeno due punti $x_0, x_1 \in (0,1)$ tali che $f'(x_0) = 0 = f'(x_1)$ $\boxed{C}$ esiste $x_0 \in [0,1]$ tale che $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in (0,1)$ $\boxed{D}$ esiste un unico $x_0 \in [0,1]$ tale che $f'(x_0) = 0$.

B4. Sia $f(x) = 0$ se $x \leq 0$ e $f(x) = x^\alpha$ se $x > 0$. Affinché f sia derivabile in tutto $\mathbb{R}$ deve essere $\boxed{A}$ $\alpha \in (0,1)$ $\boxed{B}$ $\alpha \leq 0$ $\boxed{C}$ $\alpha = 1$ $\boxed{D}$ $\alpha > 1$.

B5. Il periodo delle funzione $f(x) = 2\sin(3x)$ è $\boxed{A}$ 3 $\boxed{B}$ π $\boxed{C}$ 3π $\boxed{D}$ $2\pi/3$.

B6. Sia a_n una successione reale tale che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converga. Allora $\boxed{A}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge $\boxed{B}$ $\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n$ converge $\boxed{C}$ $\sum_{n=1}^{\infty} -a_n$ diverge $\boxed{D}$ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 1)$ converge.

B7.* Sia a_n una successione reale tale che $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$. Allora definitivamente (per $n \to +\infty$) si ha $\boxed{A}$ $|a_n - \ell| < 1/2$ $\boxed{B}$ $a_n - \ell \geq 0$ $\boxed{C}$ $a_n - \ell < 0$ $\boxed{D}$ $-1/2 < a_n - \ell \leq 0$.

B8. Sia $F(x) = \int_0^x e^{-2t^2+1} \sin t\,dt$. Allora il numero di punti stazionari di F in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ è $\boxed{A}$ uno $\boxed{B}$ due $\boxed{C}$ zero $\boxed{D}$ tre.

B9. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile, tale che $f(-1) = 1$, $f(1) = -1$. Allora $\boxed{A}$ esiste $x \in (-1,1)$ tale che $f'(x) = 0$ $\boxed{B}$ esiste $x \in (-1,1)$ tale che $f'(x) = -1$ $\boxed{C}$ f è dispari $\boxed{D}$ $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in (-1,1)$.

B10.* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} < 0$ per ogni $x_1 \neq x_0$. Allora f è $\boxed{A}$ invertibile $\boxed{B}$ concava $\boxed{C}$ monotona crescente $\boxed{D}$ derivabile.

Soluzioni

A1. il termine generale si comporta come $\frac{7}{5n^5}$, quindi la serie converge

A2. $-\frac{4}{\sqrt{2}} - 3$

A3. l'integrando si comporta come $1/\sqrt{x}$ per $x \simeq 0$, quindi l'integrale converge

A4. $u(x) = -e^{-6x} + e^{2x}$

A5. si effettua la sostituzione $t = 7 + 3\sin x$. Il valore dell'integrale è $-\frac{1}{70}$

A6. $z = 7$ con molteplicità 4, $z = \sqrt[4]{2}e^{i(\pi/4+k\pi/2)}$ con $k = 0, 1, 2, 3$

A7. 2

A8. i punti di minimo assoluto sono $x = 3$ e $x = 4$, il punto di massimo relativo è $x = \frac{7}{2}$

A9. $-3 - 6x^2$

A10. non occorre risolvere il problema di Cauchy, dall'equazione e dalla condizione di Cauchy si ricava subito che $u'(3) = 2u(3) = -10$. Quindi, la retta tangente è $y = -10(x - 3) - 5$

B1. C

B2. D

B3. C

B4. D

B5. D

B6. B

B7. A

B8. B

B9. B

B10. A