Analisi Matematica I - 09/09/16 - Tempo a disposizione: 3h
Matricola **Cognome e Nome**

A1.* Determinare e classificare i punti stazionari della funzione $f(x) = e^{2x^3+3x^2-12x-1}$.

Stabilire se i punti stazionari trovati sono punti di massimo assoluto o di minimo assoluto per f in $\mathbb{R}$.

A2. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{(-1)^n}{\ln(n)+\arctan(n)}\right) + \ln\left(2+\frac{1}{n}\right)$

A3.* Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = -6xy(x) + 3e^{-3x^2}\cos x, \\ y(0) = 4. \end{cases}$$

A4. Calcolare $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-4x} - \cos\sqrt{x}}{2\sin x}$

A5. Stabilire se il seguente integrale converge o diverge $\int_0^4 \frac{4}{4x^4+x^3}\,dx$

A6. Trovare tutte le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $(z^2+16)(z^3-3i) = 0$.

A7.* Calcolare per parti l'integrale $\int_5^6 \frac{1}{(x+3)^2}\ln(x+3)\,dx$.

A8. Sono date le funzioni $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$ e $g(x) = e^{-3x}$. Sia $h = f\circ g$. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di h nel punto di ascissa $x = 0$.

A9.* Stabilire se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n^{1/2}-3^n}{4^n+3n^3}$ converge o diverge.

Determinare per quali valori di $b \geq 0$ la seguente serie converge $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n^{1/2}-3^n}{b^{n+1}+3n^3}$.

A10. Calcolare il polinomio di MacLaurin di ordine 2 per la funzione $f(x) = 4e^x - 2\ln(1+x)$

B1. * La funzione $f(x) = 2x - \sin x$ $\boxed{\text{A}}$ è invertibile $\boxed{\text{B}}$ non ha limite per $x \to +\infty$ $\boxed{\text{C}}$ ha infiniti punti critici $\boxed{\text{D}}$ è periodica.

B2. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione pari. Per $a > 0$, stabilire quale delle seguenti funzioni (in generale) <u>non</u> è pari. $\boxed{\text{A}}$ $g(x + a)$ $\boxed{\text{B}}$ $ag(x)$ $\boxed{\text{C}}$ $g(x) + a$ $\boxed{\text{D}}$ $g(ax)$.

B3. Sia $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $f(2) = 4$ $\boxed{\text{B}}$ f è continua in $x = 2$ $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{n\to\infty} f(n) = 4$ $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{n\to\infty} f(2 + \frac{1}{n}) = 4$.

B4. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile e sia $\mathcal{C} = \left\{ x \in (a, b) : f'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \right\}$. L'insieme $\mathcal{C}$ contiene $\boxed{\text{A}}$ almeno un punto $\boxed{\text{B}}$ almeno due punti $\boxed{\text{C}}$ un solo punto $\boxed{\text{D}}$ infiniti punti.

B5. Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione tale che $f(3) = 0$ e $f'(3) = 3$. Allora si ha che $\lim_{x\to 3} \dfrac{f(x)}{x - 3}$ $\boxed{\text{A}}$ è uguale a $+\infty$ $\boxed{\text{B}}$ è uguale a 3 $\boxed{\text{C}}$ non esiste $\boxed{\text{D}}$ è uguale a 0.

B6. * Sia a_n una successione convergente ad $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n$. Se $a_n > 0$ definitivamente allora $\boxed{\text{A}}$ $\ell > 0$ $\boxed{\text{B}}$ $\ell \leq 0$ $\boxed{\text{C}}$ $\ell \geq 0$ $\boxed{\text{D}}$ $\ell < 0$.

B7. * Sia $F(x) = \displaystyle\int_0^{\sin x} f(t)\, dt$, dove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua. Allora $\boxed{\text{A}}$ $F'(x) = -f(\sin x) \cos x$ $\boxed{\text{B}}$ $F'(x) = f(\cos x)$ $\boxed{\text{C}}$ $F'(x) = f(\sin x) \cos x$ $\boxed{\text{D}}$ $F'(x) = f(\sin x)$.

B8. * Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua con $f(a) < f(b)$. Allora $\boxed{\text{A}}$ esiste un punto di minimo in $(a, b]$ $\boxed{\text{B}}$ esiste un punto di minimo in $[a, b)$ $\boxed{\text{C}}$ esiste un punto di massimo in $[a, b)$ $\boxed{\text{D}}$ esiste un punto di massimo in (a, b).

B9. Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ dove a_n è una successione infinitesima. Stabilire quale, tra le seguenti, è condizione sufficiente affinché la serie converga. $\boxed{\text{A}}$ a_n è negativa $\boxed{\text{B}}$ a_n è positiva $\boxed{\text{C}}$ a_n è limitata $\boxed{\text{D}}$ a_n è monotona decrescente.

B10. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e periodica di periodo T. Allora $\displaystyle\int_0^T f(x)\, dx$ è uguale a $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle -\int_{-T}^{0} f(x)\, dx$ $\boxed{\text{B}}$ $\displaystyle \frac{1}{2} \int_0^{2T} f(x)\, dx$ $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle 2 \int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\, dx$ $\boxed{\text{D}}$ $\displaystyle \frac{1}{2} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\, dx$.

Soluzioni

A1. I punti stazionari sono $x = -2$ e $x = 1$. Il punto $x = -2$ è un punto di massimo relativo, il punto $x = 1$ è un punto di minimo relativo.

I punti stazionari trovati non sono punti di massimo assoluto, né di minimo assoluto. Infatti, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, quindi f non ha massimo assoluto in $\mathbb{R}$. Inoltre, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Poiché la funzione esponenziale è sempre positiva e non assume mai il valore 0, ne segue che f non ha minimo assoluto in $\mathbb{R}$.

A2. Si ha che $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln(n) + \arctan(n)} = 0$, pertanto $\lim_{n\to\infty} \cos\left(\dfrac{(-1)^n}{\ln(n) + \arctan(n)}\right) = \cos 0 = 1$. Poiché $\lim_{n\to\infty} \ln\left(2 + \dfrac{1}{n}\right) = \ln 2$, il limite richiesto è $1 + \ln 2$.

A3. $y(x) = (4 + 3\sin x)e^{-3x^2}$

A4. Usando gli sviluppi $e^{-4x} = 1 - 4x + o(x^2)$, $\sin x = x + o(x^3)$, $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^4)$, si ottiene

$$\frac{e^{-4x} - \cos\sqrt{x}}{2\sin x} = \frac{-4x + \frac{1}{2}(\sqrt{x})^2 + o(x^2)}{2x + o(x^3)} \to -\frac{7}{4},$$

per $x \to 0^+$.

A5. L'integrando si comporta come $4/x^3$ per $x \to 0^+$, pertanto l'integrale diverge.

A6. $z_{1,2} = \pm 4i$, $z_{3,4,5} = \sqrt[3]{3}e^{i\theta}$ con $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$.

A7. Integrando per parti

$$\begin{aligned}
\int_5^6 \frac{1}{(x+3)^2}\ln(x+3)\,dx &= \left[-\frac{1}{x+3}\ln(x+3)\right]_5^6 + \int_5^6 \frac{1}{(x+3)^2}\,dx \\
&= \left[-\frac{1}{x+3}\ln(x+3)\right]_5^6 + \left[-\frac{1}{x+3}\right]_5^6 \\
&= -\frac{1}{9}\ln 9 + \frac{1}{8}\ln 8 - \frac{1}{9} + \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

A8. $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}$

A9. La serie converge perché il termine generale è asintotico a $a_n = -\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$, che (a parte il segno negativo) corrisponde a una serie geometrica di ragione $\dfrac{3}{4} < 1$, quindi convergente.

La seconda serie assegnata converge per $b > 3$, perché il termine generale è asintotico a

$$a_n = -\frac{3^n}{b^{n+1}} = -\frac{1}{b}\left(\frac{3}{b}\right)^n,$$

che (a parte il coefficiente $-1/b$) corrisponde a una serie geometrica di ragione $\dfrac{3}{b}$, quindi convergente per $\dfrac{3}{b} < 1$.

A10. $P_2(x) = 4 + 2x + 3x^2$

B1. A

B2. A

B3. D

B4. A

B5. B

B6. C

B7. C

B8. B

B9. D

B10. B