Analisi Matematica I - 15/06/17 - Tempo a disposizione: 3h

Matricola **Cognome e Nome**

A1. Calcolare il seguente limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{2e^{x^2} - 2\cos(x)}{3x^2\sqrt{1+x^2}}$.

A2. Stabilire il comportamento della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan(n^6)\dfrac{6^n}{3^{2n+1}}$.

A3. Determinare i punti di massimo e minimo (stabilendo se locali e/o globali) della funzione $f(x) = \ln(x+1) + \dfrac{2}{x-3}$.

A4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = 2e^{\arctan(3x)}$ e sia g la sua inversa. Calcolare $g'(2)$.

A5.* Scrivere l'integrale generale dell'equazione $y'(x) + 2\cos(x)\, y(x) = 0$.

Scrivere l'integrale generale dell'equazione $y'(x) + 2\cos(x)\, y(x) = 6e^{-2\sin x}x^2$.

A6.* Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^6 \sin(x^4)}{x^6(\tan x)^\alpha}\, dx$$

risulta convergente.

A7. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $(z+2)^2 = 3i$, esprimendo le soluzioni in forma algebrica.

A8.* Calcolare (per parti) l'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1+\tan^2(x))\, dx$.

A9.* Calcolare il seguente limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\sin\left(\frac{2}{n}\right)\dfrac{-3n^2 + n\ln(n)}{2+n}$.

A10. Determinare per quali valori dei parametri reali a, b la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \le 4 \\ a + b\ln(x-3) & x > 4 \end{cases}$$

risulta rispettivamente continua e derivabile nel suo dominio.

B1. Sia (a_n) una successione reale con $\lim_{n\to+\infty} a_n = \pi$. Allora $\lim_{n\to+\infty} \cos(a_n)$ $\boxed{A}$ non esiste $\boxed{B}$ $= 0$ $\boxed{C}$ $= -1$ $\boxed{D}$ $= 1$.

B2. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Allora $\boxed{A}$ se $f(a)f(b) = 0$, esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$ $\boxed{B}$ se $f(a)f(b) < 0$, esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$ $\boxed{C}$ se $f(a) = f(b)$, esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$ $\boxed{D}$ se $f(a)f(b) = 0$, esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.

B3. * Sia (a_n) una successione reale per la quale la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ sia convergente. Allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(1 + a_n)^2$ $\boxed{A}$ diverge a $-\infty$ $\boxed{B}$ converge semplicemente $\boxed{C}$ converge assolutamente $\boxed{D}$ diverge a $+\infty$.

B4.* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $a \in \mathbb{R}$. Allora $\lim_{x\to a} \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t)\, dt$ $\boxed{A}$ è uguale a $f(a)$ $\boxed{B}$ può non esistere $\boxed{C}$ è uguale a $f'(a)$ $\boxed{D}$ è uguale a 0.

B5. Si consideri la funzione $f(x) = \log_2(x - 5)$. La funzione f $\boxed{A}$ non è iniettiva e non è suriettiva $\boxed{B}$ è iniettiva e non è suriettiva $\boxed{C}$ è iniettiva e suriettiva $\boxed{D}$ è suriettiva e non è iniettiva.

B6. Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione. Quale delle seguenti implicazioni è corretta? $\boxed{A}$ Se f è integrabile, allora f è continua. $\boxed{B}$ Se f è continua, allora f è derivabile. $\boxed{C}$ Se f è continua, allora f è integrabile. $\boxed{D}$ Se f è integrabile, allora f è derivabile.

B7. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile con $f'(x_0) = 0$. Allora x_0 è un punto $\boxed{A}$ critico $\boxed{B}$ di minimo o di massimo locale $\boxed{C}$ di minimo o di massimo globale $\boxed{D}$ di flesso.

B8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f(x) = 1 + x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$. Allora $\boxed{A}$ f ha un minimo relativo in $x = 0$ $\boxed{B}$ f ha un massimo relativo in $x = 0$ $\boxed{C}$ f è convessa in $\mathbb{R}$ $\boxed{D}$ f è monotona in $\mathbb{R}$.

B9.* Sia $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\lim_{x\to1} f(x) = \ell > 0$. Allora $\boxed{A}$ esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in (1, 1 + \delta)$ $\boxed{B}$ $f(1) = \ell$ $\boxed{C}$ esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > \ell$ per ogni $x \in (1 - \delta, 1 + \delta)$ $\boxed{D}$ esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in (1 - \delta, 1 + \delta)$.

B10.* Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotona e sia $c \in (a, b)$. Se $\lim_{x\to c^+} f(x) > \lim_{x\to c^-} f(x)$, allora $\boxed{A}$ $f(a) < f(b)$ $\boxed{B}$ $f(a) = -f(b)$ $\boxed{C}$ $f(a) > f(b)$ $\boxed{D}$ $f(a) = f(b)$.

Soluzioni

A1. Utilizzando gli sviluppi $e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$ e $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, si ottiene

$$\frac{2e^{x^2} - 2\cos(x)}{3x^2\sqrt{1+x^2}} = \frac{3x^2 + o(x^2)}{3x^2\sqrt{1+x^2}} \;\to\; 1$$

per $x \to 0$.

A2. La serie è a termini positivi. Il termine generale della serie si riscrive come

$$\arctan(n^6)\frac{6^n}{3^{2n+1}} = \frac{\arctan(n^6)}{3} \cdot \left(\frac{6}{3^2}\right)^n = \frac{\arctan(n^6)}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

ed è pertanto asintotico a

$$\frac{\pi}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

per $n \to \infty$. La serie ha quindi lo stesso comportamento della serie geometrica di ragione $\frac{2}{3}$, che è convergente perché $\frac{2}{3} < 1$.

A3. Il dominio della funzione è $(-1, 3) \cup (3, +\infty)$. Poiché

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty,$$

la funzione f non ha massimo assoluto, né minimo assoluto. La derivata di f è

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 8x + 7}{(x+1)(x-3)^2}.$$

I punti critici sono $x = 1$ e $x = 7$. Il denominatore di $f'(x)$ è sempre positivo per x nel dominio di f, quindi il segno di $f'(x)$ è quello del suo numeratore. Si trova che $x = 1$ è un punto di massimo locale e $x = 7$ un punto di minimo locale.

A4. Si osservi che la funzione è invertibile: infatti, è strettamente crescente (quindi iniettiva) perché è composizione di funzioni strettamente crescenti. Dall'espressione di f si vede che $f(0) = 2$. Quindi $g(2) = 0$.

Per calcolare $g'(2)$ occorre usare la formula

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}$$

con $y_0 = 2$. Poiché $f'(x) = 2e^{\arctan(3x)}\frac{3}{1+9x^2}$ e $g(y_0) = g(2) = 0$, si ottiene $g'(2) = \frac{1}{6}$.

A5. Si tratta di due equazioni differenziali lineari del primo ordine, la prima omogenea, la seconda non omogenea. Utilizzando la formula risolutiva, si trova che l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y(x) = ce^{-2\sin(x)}, \quad c \in \mathbb{R},$$

mentre l'integrale generale dell'equazione non omogenea è

$$y(x) = ce^{-2\sin(x)} + 2x^3e^{-2\sin(x)}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

A6. La funzione integranda è positiva per $x \in (0,1)$. Ricordando che $\sin x \sim x$ e $\tan x \sim x$ per $x \to 0$, si trova che l'integranda è asintotica a

$$\frac{x^4}{x^6 \cdot x^\alpha} = \frac{1}{x^{2+\alpha}}.$$

Pertanto l'integrale converge per $2+\alpha < 1$, cioè $\alpha < -1$.

A7. $z_1 = -2 + \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$, $z_2 = -2 - \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$

A8. Si ricordi che $1+\tan^2(x)$ è la derivata di $\tan(x)$. Integrando per parti

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1+\tan^2(x))\,dx &= \Big[x\tan(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx \\ &= \frac{\pi}{4} + \Big[\ln(\cos(x))\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).\end{aligned}$$

A9. Si osservi che $\frac{2}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$, pertanto $\sin(\frac{2}{n}) \sim \frac{2}{n}$ per $n \to +\infty$. Si ha quindi che

$$\frac{1}{3}\sin\left(\frac{2}{n}\right)\frac{-3n^2 + n\ln(n)}{2+n} \sim \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{-3n^2}{n} \ \to\ -2$$

per $n \to +\infty$.

A10. Per la continuità si tratta di imporre che

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = f(4).$$

Poichè $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = f(4) = 16$ e $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = a$, la funzione è continua per $a = 16$ e per ogni valore di b.

Per la derivabilità imponiamo che f sia continua (quindi $a = 16$) e che

$$\lim_{x\to 4^-} f'(x) = \lim_{x\to 4^+} f'(x).$$

Poichè $\lim\limits_{x\to 4^-} f'(x) = 8$ e $\lim\limits_{x\to 4^+} f'(x) = b$, la funzione è derivabile per $a = 16$ e per $b = 8$.

B1. C

B2. C

B3. D

B4. A

B5. C

B6. C

B7. A

B8. A

B9. A

B10. A