Successioni – alcune soluzioni

1) Trovare un esempio di una successione $\{a_n\}$ che non è decrescente e tale che $a_n \to 0^+$.

Suggerimento: considerare l'esempio di successione $\{b_n\}$ visto in classe, che diverge a $+\infty$ ma non è crescente. Provare a costruire $\{a_n\}$ partendo da $\{b_n\}$.

3) Calcolare i seguenti limiti:

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n^2)}{n^2+4} = 0$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-3n+\sqrt{n}}{(n+1)^3} = 1$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-n\sqrt{n}+3n) = -\infty$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \big(3\ln n + (-1)^n\big) = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3n^3-n+5} = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \big(-\log_{10} n + \sqrt{n}\big) = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n-\ln n}{3n^3-n+5} = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{5^n+n^3}{n!} = 0$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n-1}}{n}\log_{10} n = 0$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^4}{n} = 0$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n = 0$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}}{n+1}\big(\sqrt{n^4+n^2+1}-n^2\big) = \frac{1}{2}$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sqrt{n+2+\sin(n^3)} = 0$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2+\sin n} = 1$ (usare il teorema dei due carabinieri)

4) Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+5}{n^2}\right)^{n^2} = e^5.$$
Suggerimento: ricondursi al limite
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$
con $a_n \to +\infty$.

5) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, calcolare
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^4+n^3}-\sqrt{n^4-n^3}}{n^\alpha+n}.$$
Risposta: 1 per $\alpha < 1$; $1/2$ per $\alpha = 1$; 0 per $\alpha > 1$.

6) Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la successione
$$a_n = \frac{(n+\sqrt{n})^\alpha}{3n^5+2\ln n}$$
è infinitesima.

Risposta: $\alpha < 5$