Successioni

1) Trovare un esempio di una successione $\{a_n\}$ che non è decrescente e tale che $a_n \to 0^+$.

2) Dimostrare che la successione

$$a_n = \frac{n!}{2^n} \qquad \text{per } n \geq 1$$

è monotona crescente.

3) Calcolare i seguenti limiti:

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n^2)}{n^2+4}$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-3n+\sqrt{n}}{(n+1)^3}$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-n\sqrt{n}+3n)$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \big(3\ln n + (-1)^n\big)$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3n^3-n+5}$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \big(-\log_{10} n + \sqrt{n}\big)$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n-\ln n}{3n^3-n+5}$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{5^n+n^3}{n!}$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n-1}}{n}\log_{10} n$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^4}{n}$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}}{n+1}\big(\sqrt{n^4+n^2+1}-n^2\big)$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sqrt{n+2+\sin(n^3)}$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2+\sin n}$

4) Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+5}{n^2}\right)^{n^2}.$$

5) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, calcolare
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^4+n^3}-\sqrt{n^4-n^3}}{n^\alpha+n}.$$

6) Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la successione
$$a_n=\frac{(n+\sqrt{n})^\alpha}{3n^5+2\ln n}$$
è infinitesima.

7) È data la successione definita per ricorrenza:
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n+1} \qquad \text{per } n \geq 0. \end{cases}$$
Usando il principio di induzione, dimostrare che $a_n > 0$ per ogni n. Dimostrare quindi che la successione è strettamente decrescente. Infine, provare che
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

8) È data la successione definita per ricorrenza:
$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{4} \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2}+\dfrac{1}{4} \qquad \text{per } n \geq 0. \end{cases}$$
Usando il principio di induzione, dimostrare che $a_n < \frac{1}{2}$ per ogni n. Dimostrare quindi che la successione è strettamente crescente. Infine, provare che
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

9) Dimostrare che la successione
$$a_n=\frac{n^2-\sqrt{n}-\ln n}{2n^2-n+2\sin(3n^3+1)}$$
è definitivamente positiva (suggerimento: usare il Teorema di permanenza del segno – prima forma).