Esercizi di Calcolo delle Variazioni 2016/17

1. (Problema con ostacolo) Siano date $v, w \in L^p(\Omega)$, dove $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $1 < p < \infty$. Si consideri il problema

$$\min \big\{ \|u - v\|_{L^p} : \ u \in K \big\}, \tag{1}$$

dove $K := \{u \in L^p(\Omega) : \ u(x) \geq w(x) \text{ per q.o. } x \in \Omega\}$.

- Dimostrare che K è un insieme convesso.
- Usando il metodo diretto, dimostrare che il problema (1) ammette soluzione e che esiste un unico punto di minimo $\bar{u}$.
- Calcolare esplicitamente $\bar{u}$. (Suggerimento: dove $v \geq w$, la scelta migliore è prendere v; dove $v < w$, la scelta migliore è . . .).

2. Sia X uno spazio topologico, sia $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ e sia $\overline{F} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ il rilassato di F. Dimostrare che l'epigrafico di $\overline{F}$ coincide con la chiusura dell'epigrafico di F.

3. Si considerino i seguenti problemi di minimo:

$$\min \Big\{ \int_{-1}^{1} (1 + x^2)|u'(x)|^2 \, dx : \ u \in W^{1,2}(-1, 1), \ u(-1) = 0, \ u(1) = 1 \Big\},$$

$$\min \Big\{ \int_{1}^{2} \Big(\frac{1}{2} x^2 |u'(x)|^2 + x^2 u'(x) \Big) \, dx : \ u \in W^{1,2}(1, 2), \ u(1) = 0, \ u(2) = 1 \Big\},$$

$$\min \Big\{ \int_{1}^{2} \Big(\frac{1}{2} x^2 |u'(x)|^2 + x^2 u'(x) \Big) \, dx : \ u \in W^{1,2}(1, 2), \ u(1) = 0 \Big\}.$$

Per ciascuno di essi, rispondere alle seguenti domande:

- Dimostrare che il problema di minimo ammette soluzione e che esiste un unico punto di minimo $\bar{u}$.
- Scrivere l'equazione di Eulero-Lagrange soddisfatta da $\bar{u}$.
- Usando l'equazione di Eulero-Lagrange, determinare $\bar{u}$.

4. Sia (a, b) un intervallo limitato. Dimostrare che esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\int_a^b |u(x)|^2 \, dx \leq C \int_a^b |u'(x)|^2 \, dx \tag{2}$$

per ogni $u \in W^{1,2}(a, b)$ tale che $\int_a^b u(x) \, dx = 0$.

5. Sia (a, b) un intervallo limitato e sia $f \in L^2(a, b)$. Si consideri il problema di minimo

$$\min \Big\{ \frac{1}{2} \int_a^b |u'(x)|^2 \, dx - \int_a^b f(x)u(x) \, dx : \ u \in W^{1,2}(a, b) \Big\}.$$

- Dimostrare che se $\int_a^b f(x) \, dx \neq 0$, il minimo non esiste e l'estremo inferiore vale $-\infty$.

- Dimostrare che se $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, allora

$$\inf\left\{\frac{1}{2}\int_a^b |u'(x)|^2\,dx - \int_a^b f(x)u(x)\,dx : \; u \in W^{1,2}(a,b)\right\}$$
$$= \inf\left\{\frac{1}{2}\int_a^b |u'(x)|^2\,dx - \int_a^b f(x)u(x)\,dx : \; u \in K\right\},$$

  dove

$$K := \left\{u \in W^{1,2}(a,b) : \; \int_a^b u(x)\,dx = 0\right\}.$$

- Usando il metodo diretto e la disuguaglianza (2), dimostrare che il problema

$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_a^b |u'(x)|^2\,dx - \int_a^b f(x)u(x)\,dx : \; u \in K\right\}$$

  ha soluzione e il punto di minimo è unico.
- Scrivere l'equazione di Eulero-Lagrange. Nel caso in cui $(a,b) = (-1,1)$ e $f(x) = x$, determinare esplicitamente il punto di minimo.

6. Sia $\ell > 0$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Si consideri il problema di minimo

$$\min\left\{\int_0^\ell |u'(x)|^2\,dx - \lambda\int_0^\ell |u(x)|^2\,dx + \int_0^\ell u(x)\,dx : \; u \in W_0^{1,2}(0,\ell)\right\}.$$

Ricordando che la costante di Poincaré di $(0,\ell)$ è π^2/ℓ^2, dimostrare che il problema di minimo ammette soluzione se e solo se $\lambda < \pi^2/\ell^2$.

7. Sia $u \in L^1(a,b)$ tale che

$$\int_a^b u(x)\,\varphi''(x)\,dx = 0 \quad \text{per ogni } \varphi \in C_c^2(a,b).$$

Dimostrare che u coincide q.o. con una funzione affine, cioè esistono $c, d \in \mathbb{R}$ tali che $u(x) = cx + d$ per q.o. $x \in (a,b)$.