Analisi D - Scritto del 22/02/2011

1. Siano $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ e $\mathbb{C}_- = \{z : \mathrm{Im}(z) < 0\}$. Sia $f : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}$ olomorfa. Si definiscano le seguente funzioni $f_i : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$,

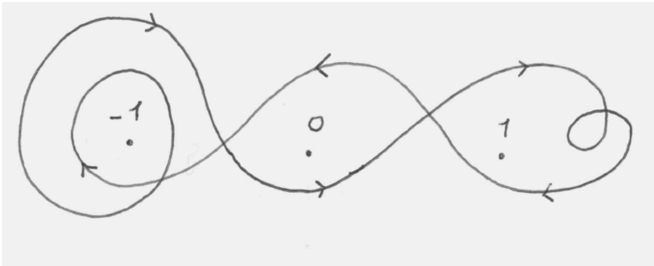
$$f_1(z) = f(\bar{z}), \qquad f_2(z) = f(-z), \qquad f_3(z) = -\mathrm{Re} f(\bar{z}) + i\, \mathrm{Im} f(\bar{z}).$$

Stabilire quali tra le f_i sono olomorfe in $\mathbb{C}_-$.

2. Calcolare

$$\int_C \frac{1 - z + iz^2}{z^2(z-1)}\, dz$$

doce C è il circuito rappresentato in figura.



3. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua e sia $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si consideri poi una successione $\{x_k\}$ (in $\mathbb{R}^n$) con $x_k \to 0$ e la successione (di funzioni) $\tilde{f}_k(x) = \tilde{f}(x - x_k)$. Studiare la convergenza delle $\tilde{f}_k$ (q.o., q.u., in misura, in L^1).

4. Sia $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ a variazione limitata. Sia $S(u)$ l'insieme dei punti di discontinuità di u. Mostrare che

- per ogni $s \in S(u)$ esistono $u(s^-) = \lim_{t \to s^-} u(t)$ e $u(s^+) = \lim_{t \to s^+} u(t)$
- $S(u)$ è al più numerabile
- la serie
$$\sum_{s \in S(u)} [\![u(s)]\!]$$
è assolutamente convergente (dove $[\![u(s)]\!] = u(s^+) - u(s^-)$).

Tempo a disposizione: 2 ore