Analisi 4 - Scritto del 23/07/2012

1. Sia f olomorfa in un aperto Ω e sia $\bar{B}_r(z_0) \subset \Omega$. Per $0 < |\zeta| < r$ mostrare che

$$\frac{f(z_0+\zeta)-f(z_0)}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)(\xi - z_0 - \zeta)}\, d\xi\,.$$

Dedurre che

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2}\, d\xi\,.$$

2. Sviluppare in serie di Taylor attorno all'origine la funzione

$$h(z) = \frac{(z-1)}{(z+1)(z-i)}\,.$$

Stabilire il raggio di convergenza.

3. Siano $u_n : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definite da $u_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{nx}\right)$. Studiarne la convergenza quasi-ovunque, quasi-uniforme, in misura e in L^1.

4. Sia μ^* una misura esterna in Ω. Sia $\nu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,+\infty]$ definita da

$$\nu^*(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } E = \emptyset \\ \mu^*(E)+1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Verificare se ν^* è una misura esterna. Verificare che (in generale) non è σ-additiva. Determinare la σ-algebra dei misurabili (secondo la costruzione di Caratheodory).

Tempo a disposizione: 2 ore