Analisi Matematica I - 14/07/14 - Tempo a disposizione: 3h

Cognome e Nome - Firma

A1. I. Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3}{n^{3+\alpha}}$

II. Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale converge $\int_3^{+\infty} \frac{x^\alpha + k}{x^3 + 3}\, dx$

A2. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n e^{-5x}\, dx$.

A3. Sia $f(x) = -2 + x^4 - 2x^3$ e sia x_f il punto stazionario di flesso di f. Calcolare $f(x_f)$.

A4. Calcolare l'integrale $\int_0^{7\pi} 7\cos^2(7x)\sin(7x)\, dx$.

A5. Sia $F(x) = \int_0^x 2e^{t^2}\, dt$. Scrivere il polinomio di McLaurin P_2 di ordine 2 per F.

A6. Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = e^{x^2} + \arctan(5x) + 1$ nel punto di ascissa $x = 0$.

A7. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = 3\sqrt{x}u(x) & \text{in } (0, +\infty) \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

A8. Si calcoli $\lim_{x\to 1} \frac{\arctan(x-1)}{2\sin(x) - 2}$.

A9.* Trovare le soluzioni complesse dell'equazione $|z|^2 z - 3\bar{z} = 0$.

A10. Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x + 5^{-x} - x^5}{x^2 - 5}$.

B1.* Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $u(x) = \int_0^x u(t)\,dt + 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{A}}$ $u(x) = \sin(x)$ $\boxed{\text{B}}$ $u(x) = e^x$ $\boxed{\text{C}}$ $u(x) = x$ $\boxed{\text{D}}$ $u(x) = \arctan(x)$.

B2.* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $(f(x) - f(y))(x - y) \geq 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f è continua $\boxed{\text{B}}$ f è derivabile con $f' \geq 0$ $\boxed{\text{C}}$ f è costante $\boxed{\text{D}}$ f è monotona.

B3. Sia $f \in C^0([0, 1])$ tale che $f(0)f(1) = 0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f ammette massimo e minimo in $[0, 1]$ $\boxed{\text{B}}$ $f \geq 0$ in $[0, 1]$ $\boxed{\text{C}}$ $\exists c \in (0, 1)$ tale che $f(c) = 0$ $\boxed{\text{D}}$ $\exists c \in [0, 1]$ tale che $f'(c) = 0$.

B4. Siano f una funzione monotona crescente e g una funzione monotona decrescente. Allora $h = g \circ f$ $\boxed{\text{A}}$ è monotona crescente $\boxed{\text{B}}$ è limitata $\boxed{\text{C}}$ è monotona decrescente $\boxed{\text{D}}$ è convessa.

B5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora $g = |f|$ è una funzione $\boxed{\text{A}}$ integrabile in $(0, +\infty)$ $\boxed{\text{B}}$ limitata $\boxed{\text{C}}$ derivabile $\boxed{\text{D}}$ continua ma non derivabile.

B6. Sia $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ con $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ ed $L \in \mathbb{R}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $L \leq 0$ $\boxed{\text{B}}$ $L = 0$ $\boxed{\text{C}}$ $L > 0$ $\boxed{\text{D}}$ $L \geq 0$.

B7. Sia $f(x) = (e^x - 1)\sin x$. Allora in un intorno di $x = 0$ $\boxed{\text{A}}$ f è monotona crescente $\boxed{\text{B}}$ f è convessa $\boxed{\text{C}}$ f è monotona decrescente $\boxed{\text{D}}$ f è concava.

B8. Sia F una primitiva di f. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\int F(x)\,dx = f(x)$ $\boxed{\text{B}}$ f è derivabile $\boxed{\text{C}}$ f' è continua $\boxed{\text{D}}$ $(F(x) + 3)' = f(x)$.

B9. Sia $w \in \mathbb{C}$ dato da $w = i^{-k}$ dove $k \in \mathbb{N}$ è un numero dispari. Allora $\boxed{\text{A}}$ $|w| > 1$ $\boxed{\text{B}}$ $Re(w) = 0$ $\boxed{\text{C}}$ $|w| < 1$ $\boxed{\text{D}}$ $Im(w) = 0$.

B10. Sia a_n una successione di numeri reali tale che $\sup a_n = 0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ a_n è limitata $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ $\boxed{\text{C}}$ $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\bar{n}$ tale $a_{\bar{n}} > -\varepsilon$ $\boxed{\text{D}}$ $\forall \varepsilon > 0$ vale $a_n > -\varepsilon$.

Soluzioni della prova del 14/07/14

Parte A

A1. $\alpha < 2$

A2. $1/5$

A3. -2

A4. $2/3$

A5. $P_2(x) = 2x$

A6. $y = 5x + 2$

A7. $u(x) = e^{2x^{3/2}}$

A8. 0

A9. $0, \pm\sqrt{3}$

A10. $+\infty$

Parte B

B1. B

B2. D

B3. A

B4. C

B5. B

B6. D

B7. B

B8. D

B9. B

B10. C