Analisi Matematica 1 - 18/06/14

Cognome e Nome - Firma

A1. Calcolare $\int_0^1 2e^x \left(x + \frac{1}{2}\right) \, dx$.

A2. I. Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{4x + \cos(4x^4)}{x^\alpha + e^{-x}}$.

II. Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(n)}{n^4(e^{-n} + n^\alpha)}.$$

A3. Si consideri il polinomio di McLaurin $P_4(x)$ di ordine 4 della funzione $f(x) = x + \sin(3x^3) - 3x^2$. Calcolare $P_4(1)$.

A4. Sia $z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ con $\rho = 2$ e $\theta = \pi/3$. Calcolare $w = z^2/\bar{z}$.

A5.* Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(t) - 4u(t) = 2 - 4t^2 \quad \text{in } (0, +\infty) \\ u(0) = 10 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

A6. Calcolare il seguente limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{6n} + \frac{1 - \cos(1/n)}{6/n} + \frac{\sin(n)}{-4n} + \frac{\sin(1/n)}{7/n}$

A7. Sia $F(x) = \int_0^x \arctan(t^7) \, dt$. Stabilire il massimo intervallo di $\mathbb{R}$ in cui F è crescente e quello in cui F è convessa.

A8. Sia $f(x) = \ln(g(x))$, dove $g(x) = (6 + x^2)$. Trovare, se esistono, e classificarli eventuali punti stazionari di f.

A9. Calcolare il limite $\lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(3x) + 7xe^{3x+1}}{7x^2 + 2x}$

A10. Si scriva l'integrale generale dell'equazione

$xu'(x) + x^2u(x) - 8x^2 = 0$ per $x > 0$.

B1.[⋆] Sia $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ continua e tale che $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f è limitata $\boxed{\text{B}}$ esiste $x_0\in(a,+\infty)$ tale che $f(x_0)=0$ $\boxed{\text{C}}$ esiste un punto di minimo globale per f $\boxed{\text{D}}$ $f\geq 0$ in $(a,+\infty)$.

B2. Sia $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ continua con $g(0)=-1$ e $g(1)=1$. Allora $\boxed{\text{A}}$ esiste $x_0\in[0,1]$ tale che $g'(x_0)=2$ $\boxed{\text{B}}$ esiste $x_0\in[0,1]$ tale che $g(x_0)=0$ $\boxed{\text{C}}$ esiste un unico $x_0\in[0,1]$ tale che $g'(x_0)=2$ $\boxed{\text{D}}$ esiste un unico $x_0\in[0,1]$ tale che $g(x_0)=0$.

B3. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f''=0$. Se $f(-1)=0$ e $f(1)=5$ allora $\boxed{\text{A}}$ $f(-2)<0$ $\boxed{\text{B}}$ $f(2)<0$ $\boxed{\text{C}}$ $f(2)\leq 0$ $\boxed{\text{D}}$ $f(-2)\geq 0$.

B4. Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monotona decrescente. Allora $\boxed{\text{A}}$ $f(a)\geq f(b)$ $\boxed{\text{B}}$ $\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$ $\boxed{\text{C}}$ f' è continua in $[a,b]$ $\boxed{\text{D}}$ f è derivabile in (a,b) con $f'\leq 0$.

B5. Sia $u:(a,b)\to\mathbb{R}$ e siano F,G due primitive di u. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\int_a^b F(x)dx=\int_a^b G(x)$ $\boxed{\text{B}}$ $\exists c>0$ tale che $F(x)=G(x)+c$ $\boxed{\text{C}}$ $\exists c\in\mathbb{R}$ tale che $F(x)-G(x)=c$ $\boxed{\text{D}}$ $\forall c>0$ $F(x)=G(x)+c$.

B6. Sia u soluzione dell'equazione $u'(x)=F(u(x))$ in un intervallo $I\subseteq\mathbb{R}$, dove $F\in C^1(\mathbb{R})$ e $F>0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $u(x)=\int_0^x F(t)dt$ $\boxed{\text{B}}$ u è monotona crescente in I $\boxed{\text{C}}$ $u(x)>0$ in I $\boxed{\text{D}}$ u è convessa in I.

B7. Sia $f\in C^0([a,b])$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\exists c\in[a,b]$ tale che $f'(c)(b-a)=f(b)-f(a)$ $\boxed{\text{B}}$ $\exists c\in[a,b]$ tale che $f(c)=\int_a^b f(x)dx$ $\boxed{\text{C}}$ $\exists c\in[a,b]$ tale che $f(c)(b-a)=\int_a^b f(x)dx$ $\boxed{\text{D}}$ $f(b)-f(a)=\int_a^b f(x)dx$.

B8. Siano $f(x)=2\log(x)$, $g(x)=x^3$ ed $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ data da $h=f\circ g$. Allora $h(x)=$ $\boxed{\text{A}}$ $\log(x^5)$ $\boxed{\text{B}}$ $5\log(x)$ $\boxed{\text{C}}$ $(2\log(x))^3$ $\boxed{\text{D}}$ $6\log(x)$.

B9. Sia a_n una successione monotona crescente tale che $\sup_n a_n=0$ e sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua tale che $f(0)=1$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=1$ $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=0$ $\boxed{\text{C}}$ $f(a_n)$ diverge $\boxed{\text{D}}$ $f(a_n)$ è monotona crescente .

B10.[⋆] Sia $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $p(x)=|x^3-x^2|$. Allora $x_0=1$ è $\boxed{\text{A}}$ un punto angoloso $\boxed{\text{B}}$ un punto di disontinuità $\boxed{\text{C}}$ un punto di cuspide $\boxed{\text{D}}$ un punto di flesso.

Soluzioni della prova del 18/06/2014

Parte A

A1. $e+1$

A2. $\alpha > 2$ o $\alpha > -3$

A3. 1

A4. -2

A5. $5e^{2t} + 5e^{-2t} + t^2$

A6. $1/7$

A7. $(0, +\infty)$ e $\mathbb{R}$

A8. $x = 0$ minimo

A9. $-\infty$

A10. $ce^{-x^2/2} + 8$

Parte B

B1. A

B2. B

B3. A

B4. A

B5. C

B6. B

B7. C

B8. D

B9. A

B10. A