Analisi Matematica I - 27/01/15 - Tempo a disposizione: 3h

Cognome e Nome - Firma

A1.* Si calcoli l'integrale $2\int_0^1 (x^2e^x + 1)\, dx$.

A2. Stabilire gli intervalli di convessità della funzione $f(x) = e^{-x^2+3x}$.

A3. Si calcoli

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n^2 \arctan(n)}{3n^2 + n} + e^{-n} \sin(n) \right) =$$

A4. Determinare tutti e soli gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui converge la serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{2}{n!} + \frac{n^3}{\sin(2n) + n^\alpha} \right).$$

A5. Trovare e classificare i punti stazionari della funzione $f(x) = \ln(1 + (x^2 - 4)^2)$.

A6. * Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 per $f(x) = \cos(4\pi + x^2)$ con centro $x_0 = \sqrt{\pi}$.

A7. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(t) + u'(t) - 2u(t) = 0 \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 7. \end{cases}$$

A8.* Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\ln(1 + 2x^2)}{\cos(2x) - 1} + 3x \ln |x| \right) =$$

A9. Siano z_1, z_2, z_3 le radici (in $\mathbb{C}$) dell'equazione $(z - i)^3 = 1$.

Allora $\mathrm{Im}\ z_1 + \mathrm{Im}\ z_2 + \mathrm{Im}\ z_3 =$

A10.* Sia $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_{-1}^{x} \arctan(e^t + 3/2)\, dt$. Trovare i punti x_m ed x_M rispettivamente di minimo e massimo assoluto in $[-1, 1]$.

B1. * Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione pari e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e crescente. Allora $\boxed{\text{A}}$ $g \circ f$ è crescente $\boxed{\text{B}}$ $f \circ g$ è pari $\boxed{\text{C}}$ $g \circ f$ è limitata $\boxed{\text{D}}$ $f \circ g$ assume il suo valore massimo in $x = 0$.

B2. * Si consideri l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}\,dx$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ se $\beta > 1$ l'integrale converge $\boxed{\text{B}}$ se $\beta > 1$ e $\alpha > \beta$ l'integrale diverge $\boxed{\text{C}}$ se $\beta < 1$ e $\alpha > 0$ l'integrale converge $\boxed{\text{D}}$ se $\beta < 1$ l'integrale converge.

B3. Si consideri la soluzione del problema di Cauchy $u'(x) = -u^2(x)$ con $u(0) = 0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $u(x) = 0$ $\boxed{\text{B}}$ $u(x) = 1/x$ $\boxed{\text{C}}$ $u(x) = x^2$ $\boxed{\text{D}}$ $u(x) = e^{2x}$.

B4. * Sia $f \in C^0([0,1])$, $f > 0$, tale che $\displaystyle\int_0^1 f(x)^2 dx > \int_0^1 f(x)dx$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\forall x_0 \in [0,1]$ si ha $f(x_0) < 1$ $\boxed{\text{B}}$ $\exists\, x_0, x_1 \in [0,1]$ tali che $f(x_0) = f(x_1) = 1$ $\boxed{\text{C}}$ $\forall x_0 \in [0,1]$ si ha $f(x_0) = 1$ $\boxed{\text{D}}$ $\exists\, x_0 \in [0,1]$ tale che $f(x_0) > 1$.

B5. * Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x\cos(x^{-2})$ se $x > 0$ e $f(x) = x$ se $x \leq 0$. Allora in $x_0 = 0$ la funzione f è $\boxed{\text{A}}$ continua e derivabile $\boxed{\text{B}}$ non continua ma derivabile $\boxed{\text{C}}$ continua ma non derivabile $\boxed{\text{D}}$ non continua e non derivabile.

B6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente monotona. Allora f è $\boxed{\text{A}}$ continua $\boxed{\text{B}}$ suriettiva $\boxed{\text{C}}$ invertibile $\boxed{\text{D}}$ derivabile.

B7. Sia a_n una successione convergente con $a_n \to l$, $l \in \mathbb{R}$, e sia $f \in C^0(\mathbb{R})$. Allora $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(a_n) =$ $\boxed{\text{A}}$ $+\infty$ $\boxed{\text{B}}$ $-\infty$ $\boxed{\text{C}}$ l $\boxed{\text{D}}$ $f(l)$.

B8. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora $\boxed{\text{A}}$ esiste un punto di massimo assoluto $x_M \in [a,b]$ $\boxed{\text{B}}$ esiste un punto di massimo assoluto $x_M \in (a,b)$ $\boxed{\text{C}}$ esiste un punto di minimo assoluto $x_m \in (a,b]$ $\boxed{\text{D}}$ esiste un punto di minimo assoluto $x_m \in [a,b)$.

B9. Sia $a_n > 0$ tale che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge. Allora, per $n \to +\infty$, si ha $\boxed{\text{A}}$ $e^{a_n} \to 1$ $\boxed{\text{B}}$ $(a_n)^{1/2} \to 1$ $\boxed{\text{C}}$ $\ln(a_n) \to 1$ $\boxed{\text{D}}$ $a_n^2 \to 1$.

B10. Sia $g : [2,3] \to \mathbb{R}$ derivabile tale che $g(3) - g(2) > 0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\exists\, x_0 \in [2,3]$ tale che $g'(x_0) > 0$ $\boxed{\text{B}}$ $\exists!\, x_0 \in [2,3]$ tale che $g'(x_0) > 0$ $\boxed{\text{C}}$ $\exists\, x_0 \in [2,3]$ tale che $g'(x_0) \leq 0$ $\boxed{\text{D}}$ $\forall x_0 \in [2,3]$ si ha $g'(x_0) > 0$.

Soluzioni della prova del 27/01/2015

Parte A

A1. $2(e-1)$

A2. $(-\infty,(3-\sqrt{2})/2] \cup [3+\sqrt{2})/2,+\infty)$

A3. $\pi/3$

A4. $\alpha > 4$

A5. minimo assoluto in -2 e in 2, massimo relativo in 0

A6. $-1+2\pi(x-\sqrt{\pi})^2$

A7. $u(t) = 3e^t - 2e^{-2t}$

A8. -1

A9. 3

A10. $x_m = -1$, $x_M = 1$

Parte B

B1. C

B2. A

B3. A

B4. D

B5. C

B6. C

B7. D

B8. A

B9. A

B10. A