Analisi Matematica I - 07/09/15 - Tempo a disposizione: 3h
Cognome e Nome - Firma

A1.* Sia $f : \left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \ln(5x)$. Si trovi, se esiste, il punto $c \in \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$ tale che la retta tangente al grafico di f in $(c, f(c))$ sia parallela alla retta passante per i punti $\left(\frac{1}{5}, f\left(\frac{1}{5}\right)\right)$ e $\left(\frac{2}{5}, f\left(\frac{2}{5}\right)\right)$.

A2. Si calcoli $\lim_{x\to 0} \frac{x^{1/2} + |x|}{5e^x + x^{1/3}} + |x-6|$

A3.* Si calcoli l'integrale $\int_0^1 \arctan(4x)\, dx$.

A4.* Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) + \frac{4}{x^2} u(x) = 0 \\ u(4) = 6. \end{cases}$$

A5.* Si consideri la successione $a_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Si calcoli $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{a_n} (3 - x^3)\, dx$.

A6. Calcolare la somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n}$

A7. Si consideri il numero complesso $z = 4e^{-i\pi}$. Si calcoli $z\bar{z} + 2z - \bar{z}$.

A8. Sia $f(x) = x^2 + \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right)$. Si scriva il suo polinomio di Taylor di ordine 2 e centro $x_0 = 1$.

A9. Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \ln\left(\frac{4x^2 + 1}{2x}\right)$. Si trovino i punti di massimo e minimo relativi (locali) di tale funzione.

A10. Si stabilisca se il seguente integrale generalizzato converge, diverge o non esiste $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 \arctan x}\, dx$.

B1.* Data la successione di numeri reali $\{a_k\}$, si consideri la successione $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_{k+1}$. Allora la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k =$ $\boxed{\text{A}}$ $a_0 + \lim_{n\to+\infty} s_n$ $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{n\to+\infty} s_n - a_0$ $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{n\to+\infty} s_{n+1}$ $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{n\to+\infty} s_n$.

B2. * Sia $f \in C^2([a,b])$ con $f''(x) > 0$, $\forall x \in (a,b)$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f assume minimo assoluto in un estremo $[a,b]$ $\boxed{\text{B}}$ f assume massimo assoluto in un estremo di $[a,b]$ $\boxed{\text{C}}$ f assume massimo assoluto in (a,b) $\boxed{\text{D}}$ f assume minimo assoluto in (a,b).

B3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile nel punto x_0. Allora $f'(x_0) =$ $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(h) - f(x_0)}{h - x_0}$ $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{h\to x_0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x+x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$.

B4. Sia a_n una successione di numeri reali superiormente limitata. Allora a_n $\boxed{\text{A}}$ ammette estremo inferiore finito $\boxed{\text{B}}$ ammette massimo finito $\boxed{\text{C}}$ ammette estremo superiore finito $\boxed{\text{D}}$ ammette limite.

B5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $\lim_{x\to c} f(x) = l$ con $c, l \in \mathbb{R}$. Sia a_n una successione reale tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = c$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(c)$ $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(l)$ $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = l$ $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = c$.

B6. Si consideri la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n^\alpha}$. La serie converge se e solo se $\boxed{\text{A}}$ $\alpha \geq 0$ $\boxed{\text{B}}$ $\alpha > 1$ $\boxed{\text{C}}$ $\alpha \geq 1$ $\boxed{\text{D}}$ $\alpha > 0$.

B7.* L'equazione $z^n = w$ ammette in $\mathbb{C}$ $\boxed{\text{A}}$ n radici distinte $\boxed{\text{B}}$ due radici se n è pari $\boxed{\text{C}}$ n radici distinte se $w \neq 0$ $\boxed{\text{D}}$ una radice se n è dispari.

B8. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = o(g(x))$ per $x \to c$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{x\to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$ $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{x\to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$ $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

B9. * Si consideri la funzione integrale $F(x) = \int_1^x |t|\, dt$. Allora il punto $x = 0$ per F è di $\boxed{\text{A}}$ flesso $\boxed{\text{B}}$ massimo relativo $\boxed{\text{C}}$ minimo relativo $\boxed{\text{D}}$ non derivabilità.

B10. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ se $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ allora f è continua in $x = 0$ $\boxed{\text{B}}$ se $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$ allora f è continua in $x = 0$ $\boxed{\text{C}}$ se f è continua in $x = 0$ allora $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$ $\boxed{\text{D}}$ se $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$ allora f è continua in $x = 0$.

Soluzioni della prova del 07/09/15

Parte A

A1. $1/(5\ln 2)$

A2. 6

A3. $\arctan(4) - \ln(17)/8$

A4. $6e^{(4/x-1)}$

A5. $11/4$

A6. $1/3$

A7. 12

A8. $x^2 - (x-1)\pi/2$

A9. $x_{min} = 1/2$

A10. converge

Parte B

B1. A

B2. B

B3. A

B4. C

B5. C

B6. D

B7. C

B8. D

B9. A

B10. C