Analisi Matematica I - 26/01/16 - Tempo a disposizione: 3h
Cognome e Nome - Firma

A1.* Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{1 - 2\ln x}{x}$. Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = \lambda$.

A2. Calcolare il seguente limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n + 3n + 2^{-n}}{\cos(2n) + 4n} + e^{2n\ln(1/n)} \arctan(3n)$

A3.* Calcolare $\displaystyle\int_0^{1/2} \left[(4x^2 + 2)3\pi\cos(3\pi x) + 8x\sin(3\pi x)\right] dx$

A4.* Calcolare il seguente limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{6(\sin(x^2) - x^2)}{x^6(2 + x\ln(x))^4}$

A5. Sia $z = 2 - 3i$. Calcolare la parte reale del numero complesso $(z - 3\bar{z})e^{i\pi/3}$.

A6.* Per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ è convergente la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(n^{-4} + \frac{1}{n^{\lambda+3}}\right)$

A7. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (3x^2 + 2)\, y(x), \\ y(1) = -1. \end{cases}$$

A8. Sia data $f(x) = \cos(2x^3)e^{x^4}$. Calcolare $\dfrac{f^{(10)}(0)}{10!}$ utilizzando il polinomio di Mac Laurin.

A9. Sia $f(x) = 4e^{x(x^2-2)}$. Determinare i punti di massimo e minimo (relativi e assoluti) di f in $[0, 4]$

A10. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 6x + 5e^x$ e sia f^{-1} la sua inversa. Si calcoli $(f^{-1})'(6 + 5e)$.

B1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x - 3$ per $x < 0$ e $f(x) = 2^x + k\cos(x)$ per $x \geq 0$. Per quali valori di k la funzione f è continua in tutto $\mathbb{R}$? $\boxed{\text{A}}$ $k = -5$ $\boxed{\text{B}}$ $k > 3$ $\boxed{\text{C}}$ $k = -4$ $\boxed{\text{D}}$ $k = 2$.

B2.* Sia $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, dove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile e crescente. Allora F è $\boxed{\text{A}}$ monotona $\boxed{\text{B}}$ dispari $\boxed{\text{C}}$ convessa $\boxed{\text{D}}$ pari.

B3. Si consideri l'equazione $y''(x) - \alpha^2 y(x) = 0$ con $\alpha \neq 0$. Allora l'integrale generale dell'equazione è $\boxed{\text{A}}$ $y(x) = c_1 \sin(\alpha x) + c_2 \cos(\alpha x)$ al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$ $y(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}$ al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$ $y(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 x e^{\alpha x}$ al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$ $y(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\alpha x}$ al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

B4. * Sia $\lim_{x\to+\infty} f(x)/g(x) = \ell$ con $\ell > 0$. Allora, definitivamente (per $x \to +\infty$) si ha $\boxed{\text{A}}$ $f(x)g(x) \leq 0$ $\boxed{\text{B}}$ $f(x) + g(x) \leq 0$ $\boxed{\text{C}}$ $f(x)g(x) \geq 0$ $\boxed{\text{D}}$ $f(x) + g(x) \geq 0$.

B5. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora $\boxed{\text{A}}$ esiste un solo punto di massimo $\boxed{\text{B}}$ esiste un punto di minimo $\boxed{\text{C}}$ esiste un solo punto di minimo $\boxed{\text{D}}$ esiste un punto critico.

B6.* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa e sia $g(x) = e^{f(x)}$. Allora g è $\boxed{\text{A}}$ monotona $\boxed{\text{B}}$ invertibile $\boxed{\text{C}}$ limitata $\boxed{\text{D}}$ convessa.

B7. Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni monotone decrescenti. Allora $f \circ g$ è $\boxed{\text{A}}$ limitata $\boxed{\text{B}}$ monotona crescente $\boxed{\text{C}}$ invertibile $\boxed{\text{D}}$ monotona decrescente.

B8. Siano a_n e b_n due successioni con $0 \leq a_n \leq b_n$ per $n \geq 5$. Quale affermazione è corretta? $\boxed{\text{A}}$ Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge $\boxed{\text{B}}$ Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge $\boxed{\text{C}}$ Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge $\boxed{\text{D}}$ Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge.

B9.* Sia f derivabile in a. Allora $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} =$ $\boxed{\text{A}}$ $f'(2a)$ $\boxed{\text{B}}$ $f'(a)$ $\boxed{\text{C}}$ $2f'(a)$ $\boxed{\text{D}}$ $f'(a)/2$.

B10. Sia a_n una successione tale che $a_n \to +\infty$. Allora $\boxed{\text{A}}$ a_n è monotona crescente $\boxed{\text{B}}$ a_n è superiormente illimitata $\boxed{\text{C}}$ per ogni $M > 0$ si ha che $a_n > M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\boxed{\text{D}}$ a_n è inferiormente illimitata.

Soluzioni della prova del 26/01/16

Parte A

A1. Tracciare il grafico di $f(x)$ e trovarne il minimo. Dal grafico si vede che l'equazione ha: 1 soluzione per $\lambda = -2e^{-3/2}$ e per $\lambda \geq 0$, nessuna soluzione per $\lambda < -2e^{-3/2}$ e due soluzioni nel caso rimanente.

A2. $3/4$

A3. L'integranda è la derivata di $(4x^2 + 2)\sin(3\pi x)$. L'integrale è -3.

A4. $-1/16$

A5. $-2 + 6\sqrt{3}$

A6. Se $n^{-4} + n^{-(\lambda+3)} \to 0$ la successione si comporta come $n^{-4} + n^{-(\lambda+3)}$. La serie di n^{-4} converge. Quella di $n^{-(\lambda-3)}$ converge se $\lambda > -2$.

A7. Equazione lineare, del primo ordine, omogenea: $y(x) = -e^{x^3+2x-3}$.

A8. Espandere $\cos(t)$ e e^s e sostituire $t = 2x^3$ e $s = x^4$. Si trova $f(x) = 1 + ... - 2x^{10} + ...$ Quindi $f^{(10)}(0)/10! = -2$.

A9. Minimo globale in $x_{min} = \sqrt{2/3}$. Massimo locale in $x_{max,1} = 0$. Massimo globale in $x_{max,2} = 4$.

A10. $1/(6 + 5e)$

Parte B

B1. C

B2. C

B3. B

B4. C

B5. B

B6. D

B7. B

B8. A

B9. B

B10. B