Esercizi Elementari di Analisi I

Indice

Versione aggiornata al 17/09/09

1 Numeri Complessi

1. Siano $z_1 = -1 + i$ e $z_2 = -1 - i$. Calcolare $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$ e $z_1 \overline{z}_2$.
2. Siano $z_1 = -\frac{2}{5} + i\sqrt{2}$ e $z_2 = \frac{5}{2} - 2i$. Calcolare $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$ e $z_1 \overline{z}_2$.
3. Ricordando che, se z è un numero complesso, $z\overline{z}$ è un numero reale, mettere sotto la forma $a + ib$ il seguente numero complesso:
$$\frac{3 - i}{4 + 5i}.$$
4. Ricordando che, se z è un numero complesso, $z\overline{z}$ è un numero reale, mettere sotto la forma $a + ib$ il seguente numero complesso:
$$\frac{5 - 2i}{1 + 2i}.$$
5. Siano z_1 e z_2 le due radici (complesse) della seguente equazione di secondo grado:
$$z^2 + 2z + 2 = 0.$$
Calcolare $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$ e $z_1 \overline{z}_2$.
6. Siano z_1 e z_2 le due radici (complesse) della seguente equazione di secondo grado:
$$z^2 + 2z + 6 = 0.$$
Calcolare $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$ e $z_1 \overline{z}_2$.

2 Limiti

1. Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\log_3 x}$ $\qquad \lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-x}{x-1}$

2. Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to 2} 2^{2x} + \log_2 x^2$ $\qquad \lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{2^x}$

3. Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to 0^+} |x|$ $\qquad \lim_{x\to 0^-} \operatorname{segno}(x)$

4. Sia
$$f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ 2^x & x \geq 0. \end{cases}$$
Calcolare $\lim_{x\to 0} f(x)$.

5. Sia
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \sqrt{2} & x > 1 \\ x^3 - \sqrt{2} & x \leq 0. \end{cases}$$
Calcolare $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.

6. Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2}$ $\qquad \lim_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2}$ $\qquad \lim_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^3}$

7. Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to 2\pi} \ln(4\cos x)$ $\qquad \lim_{x\to \pi/2^-} \ln(4\cos x)$

8. sia $f(x) = e^x$ e $g(x) = x^2 - 1$. Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to -1} f\circ g(x)$ $\qquad \lim_{x\to -1} g\circ f(x)$

9. Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{t\to 0} \operatorname{sen}^2(t) + \ln(1+t) + e^{2t}$ $\qquad \lim_{s\to 1} \dfrac{3s+8s^2+4}{15s}$

10. Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x+\ln x}{x}$ $\qquad \lim_{x\to 3^+} \dfrac{x-3}{x^2-6\,x+9}$

11. Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+3\,x}{x-1}$ $\qquad \lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x-2}$

12. Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to 5} \dfrac{x^2-4x-5}{x-5}$ $\qquad \lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^{-2x}}{x}.$

13. Calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-x-2}{x+1} \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{x+2}{x^2-x-2} \qquad \lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right).$$

14. Calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{-x^2+2x+3} \qquad \lim_{x\to -\infty} \ln(1-3x) \qquad \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}.$$

3 Funzioni Continue

1. Per quale valore del parametro A la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+A} & x \geq 1 \\ 12\,x - 1 & x < 1 \end{cases}$$

è continua in $(-\infty, +\infty)$?

2. Per quale valore del parametro A la funzione

è continua in $(-\infty, +\infty)$? $$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & x \leq 3 \\ \log_2(x + A) & x > 3 \end{cases}$$

3. Per quali valori reali dei parametri a e b la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -2\,x + 4 + a & x < 0 \\ x^2 + b\,x + 2\,a + 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2\,b & x > 1 \end{cases}$$

risulta continua su tutta la retta reale ?

4. Determinare il valore del parametro k in corrispondenza del quale la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3\,x + k & x < 1 \\ \ln(2x) & x \geq 1 \end{cases}$$

risulti continua su tutta la retta reale.

5. Determinare il valore del parametro k in corrispondenza del quale la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{kx} & x > 2 \\ 18\,x & x \leq 2 \end{cases}$$

risulti continua su tutta la retta reale.

6. Determinare il valore del parametro k in corrispondenza del quale la funzione

$$\begin{cases} e^x + k & x < 1 \\ \ln(2x) & x \geq 1 \end{cases}$$

risulti continua su tutta la retta reale.

7. Determinare il valore del parametro λ in modo tale che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2 & x \geq 2 \\ e^{4x-\lambda} & x < 2 \end{cases}$$

sia continua su tutta la retta reale.

8. Determinare il valore del parametro λ in modo tale che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \ln(5x - \lambda) & x > 4 \\ x^2 + 1 & x \leq 4 \end{cases}$$

risulti continua su tutta la retta reale.

9. Determinare il valore del parametro k in corrispondenza del quale la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{kx} & x > 3 \\ 2x & x \leq 3. \end{cases}$$

risulta continua si tutta la retta reale.

10. Determinare il valore del parametro reale λ per cui la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{\lambda x - 1} & x \geq 3 \\ \dfrac{1}{2x + 1} & x < 3 \end{cases}$$

risulti continua nel punto $x = 3$.

4 Domande Teoriche su Logaritmi

1. Siano $a, b, c > 1$ tre numeri reali. L'espressione $\log_b a^c$ è equivalente a

   a $\dfrac{c}{\log_a b}$ **b** $c \log_a b$ **c** $\dfrac{c}{\log_b a}$ **d** $a \log_b c$.

2. Se A è un numero reale, allora il numero $\ln \dfrac{A}{5}$

   a è positivo per ogni $A > 0$; **b** è positivo per ogni $0 < A < 5$;
   c è negativo per ogni $A > 0$; **d** è negativo per ogni $0 < A < 5$.

3. Sia $f(x) = \log_b x$ con $b > 0$ e $b \neq 1$.

   a Se $0 < b < 1$ allora f è sempre positiva.

   b Se $0 < b < 1$ allora f è crescente.

   c Se $0 < b < 1$ allora f è convessa.

   d Se $b > 1$ allora f è sempre positiva.

4. Sia $f(x) = \ln(x - 2)$. Allora f è:

   a continua in tutto il suo dominio
   b positiva in tutto il suo dominio
   c decrescente in tutto il suo dominio
   d convessa in tutto il suo dominio

5. Sia $f(x) = a^x$. Quale delle seguenti implicazioni è corretta:

   a se $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ allora $a > 1$
   b se $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ allora $0 < a < 1$
   c se $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ allora $a > 1$
   d se $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ allora $0 < a < 1$

6. Per ogni $x, y \in (0, +\infty)$ si ha $\ln(x + y) = \ln(x) \cdot \ln(y)$. **V** **F**

7. Sia $a > 0$; allora **V** **F**

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty \quad \Rightarrow \quad 0 < a < 1$$

8. Vale la seguente identità: $\log_5 3 \log_3 5 = 1$. **V** **F**

9. Sia $\ell = \log_b \frac{1}{2}$. Se $\ell > 0$ allora

   a $b < 1$ **b** $b > 1$ **c** $b = 1$ **d** nessuna delle precedenti.

10. Se $2^x = -x - 1$ allora $x < 0$. **V** **F**

5 Derivate

1. Sia $f(t) = \dfrac{15\,t}{e^t + 4}$, per ogni $t \in \mathbf{R}$. Calcolare $f'(0)$.

2. Si consideri la funzione $f(x) = x^2 + 5\,x + 1$, per $x > -1$. Calcolare $5\,(f^{-1})'(1)$.

3. Qual è la funzione $f(x)$ che passa per il punto di coordinate $(0, 1)$ e la cui tangente ha pendenza $\dfrac{24\,x^3}{x^4 + e}$?

4. Data la funzione $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, con $x \geq 0$, calcolare la derivata della sua inversa $f^{-1}(x)$ nel punto $x = 1$.

5. Qual è la funzione $f(x)$ che passa per il punto di coordinate $(0, 3)$ e la cui tangente ha pendenza $\dfrac{x}{x^2 + e}$, per ogni x numero reale ?

6. Sia $f(t) = \dfrac{12\,t}{e^t + 2}$, per ogni $t \in \mathbf{R}$. Calcolare $f'(0)$.

7. Sia $f(x) = \dfrac{e^x + 2}{3x}$, per ogni $x \neq 0$. Calcolare $f'(1)$.

8. Si consideri la funzione $f(x) = x^2 + 4\,x + 1$, per $x > -2$. Calcolare $(f^{-1})'(1)$.

9. Date le funzioni
$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = \sqrt{x},$$
calcolare la derivata della funzione composta $h(x) = g\big(f(x)\big)$ nel punto $x = 4$.

10. Sia $f(x) = e^{13x+3}$. Calcolare la derivata dell'inversa $f^{-1}(x)$ nel punto $x = 1$.

11. Sia $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$.
Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel suo punto di ascissa $x = 1$.

12. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{\cos x} + e^{3x^6}$.

13. Calcolare l'equazione della retta tangente alla curva $y = \dfrac{3 + x}{x^2}$ nel suo punto di ascissa $x = 1$.

14. Data la funzione $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, con $x \geq 0$, calcolare la derivata della sua inversa $f^{-1}(x)$ nel punto $x = 1$.

15. Data la funzione $f(x) = \dfrac{e^{3x} + 4}{5x}$, calcolare $f'(1)$.

16. Sia $f(x) = e^{4x} + 1$. Calcolare la derivata dell'inversa $f^{-1}(x)$ nel punto $x = 2$.

17. Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva
$$y = \frac{2x + 1}{e^{2x} + 2}$$
nel suo punto di ascissa 0.

18. Sia $f(x) = e^{2x+1} - 1$. Calcolare la derivata dell'inversa $f^{-1}(x)$ nel punto $x = 0$.

19. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$f(x) = \frac{2 + x^2}{x}$$

nel suo punto di ascissa $x = 1$.

20. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$f(x) = \ln x + \frac{1}{x} + x$$

nel suo punto di ascissa $x = 1$.

21. Sia $f(t) = \dfrac{2e^t + 5}{3t}$, per ogni $t \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$. Calcolare $f'(1)$.

22. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$y = \frac{e^{3x+1}}{x^2 + 2}$$

nel suo punto di ascissa 1.

23. Sia $f(x) = x^3 + 8$. Calcolare la derivata dell'inversa $f^{-1}(x)$ nel punto $x = 0$.

24. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$f(x) = e^{(1/x)}$$

nel suo punto di ascissa $\dfrac{1}{2}$ (scrivere il risultato nella forma $y = mx + q$).

25. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$f(x) = \ln(2x + 1)$$

nel suo punto di ascissa $x_0 = 0$.

26. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$f(x) = e^{2x}$$

nel suo punto di ascissa 3 (scrivere il risultato nella forma $y = mx + q$).

27. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$f(x) = \ln(2x)$$

nel suo punto di ascissa 3 (scrivere il risultato nella forma $y = mx + q$).

28. Data la funzione $f(x) = \cos(2x)$, calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel suo punto di ascissa $\dfrac{\pi}{4}$.

6 Equazioni Differenziali

1. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 5y'(x) - 2y(x) + 1 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 2y'(x) - 3y(x) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = 3y(x) + 1 \\ y(2) = 4 \end{cases}$$

4. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = 3 \\ y(2) = 4 \end{cases}$$

5. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) = 0 \\ y(2) = 0 \\ y'(2) = 1 \end{cases}$$

6. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) + 2y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

7. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) = 0 \\ y(3) = 1 \\ y'(3) = 2 \end{cases}$$

8. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) - 6y'(x) + 8y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

9. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + 3y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

10. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

11. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) - 2y(x) + 10 = 0 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

12. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) - 4y(x) = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3. \end{cases}$$

13. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

14. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 2y' - y = 1 \\ y(1) = 2\,. \end{cases}$$

15. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

16. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = -3y(x) \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

17. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = -2y(x) \\ y(1) = 3. \end{cases}$$

18. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2y(x) + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

19. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 4. \end{cases}$$

20. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{2}{3}y(x) - 1 \\ y(3) = 2e^2 + \dfrac{3}{2}\,. \end{cases}$$

7 Studi di Funzione

1. Si consideri la funzione
$$f(x) = 2\,x^3 - 12\,x^2 + 1.$$
   a) Dire dove $f(x)$ è crescente e dove è decrescente.
   b) Dire dove $f(x)$ ha concavità verso l'alto e dove verso il basso.
   c) Calcolare massimo e minimo assoluti di $f(x)$ nell'intervallo $[2, 6]$.

2. Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 2\,\ln(1+x).$$
   a) Specificare il dominio di $f(x)$ e i limiti agli estremi del dominio.
   b) Dire dove $f(x)$ è crescente e dove è decrescente e precisare le coordinate degli eventuali punti di massimo e minimo realtivo.
   c) Dire dove $f(x)$ ha concavità verso l'alto e dove verso il basso e precisare le coordinate degli eventuali punti di flesso.
   d) Tracciare il grafico di $f(x)$.

3. Si consideri la funzione
$$f(x) = \ln\left[(1-x^2)^2\right].$$
   a) Specificare il dominio di $f(x)$ e i limiti agli estremi del dominio.
   b) Precisare le coordinate degli eventuali punti di massimo e minimo relativo e degli eventuali punti di flesso.
   c) Tracciare il grafico di $f(x)$.
   d) Calcolare i punti di estremo assoluto di $f(x)$ nell'intervallo chiuso e limitato $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

4. Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{\ln(x-3)+5}{3-x}.$$
   a) Specificare il dominio di $f(x)$ e i limiti agli estremi del dominio.
   b) Tracciare il grafico di $f(x)$, precisando le coordinate degli eventuali punti di massimo e minimo relativo e degli eventuali punti di flesso.
   c) Calcolare gli estremi assoluti di $f(x)$ nell'intervallo $[3+e^{-5}, 3+e^{-1}]$.

5. Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{2}{3}\,x^3 - 18\,x + 6.$$
   a) Specificare il dominio di $f(x)$ e i limiti agli estremi del dominio.
   b) Precisare le coordinate degli eventuali punti di massimo e minimo relativo e degli eventuali punti di flesso.
   c) Tracciare il grafico di $f(x)$.
   d) Calcolare i punti di estremo assoluto di $f(x)$ nell'intervallo chiuso e limitato $[0, 4]$.

6. Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2}.$$
   a) Specificare il dominio di $f(x)$ e i limiti agli estremi del dominio.

b) Precisare le coordinate degli eventuali punti di massimo e minimo relativo e degli eventuali punti di flesso.

c) Dire dove la funzione è crescente e decrescente, e dove ha la convavità è rivolta verso l'alto e verso il basso.

d) Tracciare il grafico di $f(x)$.

7. Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{\sqrt{x-4}}.$$

a) Precisare il dominio e i limiti agli estremi del dominio.

b) Dire dove $f(x)$ è crescente e dove è decrescente e calcolare le coordinate degli eventuali punti di estremo relativo.

c) Calcolare massimo e minimo assoluti di $f(x)$ nell'intervallo $[5, 8]$.

8. Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{8x^2 - 8}.$$

a) Precisarne il dominio e i limiti agli estremi del dominio.

b) Dire dove $f(x)$ è crescente e dove è decrescente.

c) Calcolare $\lim_{x \to -5} f(x)$.

9. Si consideri la funzione
$$f(x) = (x-3)^3 + 5.$$

a) Studiare $f(x)$ (dominio, limiti agli estremi del dominio, crescenza/descrescenza, estremi relativi, concavitá, flessi).

b) Calcolare massimo e minimo assoluto di $f(x)$ in $[2, 4]$.

10. Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{-15 - 5\,x^2}{1 - x}.$$

a) Precisarne il dominio e i limiti agli estremi del dominio.

b) Determinarne gli eventuali asintoti.

c) Dire dove $f(x)$ è crescente e dove è decrescente.

d) Dire dove $f(x)$ ha concavità verso l'alto e e dove ha concavità verso il basso.

11. Tracciare il grafico della funzione
$$f(x) = |x^3 + 1| + 2.$$

12. Tenendo conto che la funzione
$$f(x) = \frac{x^3}{8 - 2\,x^2}$$
è dispari,

a) precisarne il dominio e i limiti agli estremi del dominio,

b) determinarne gli eventuali asintoti,

c) dire dove $f(x)$ è crescente e dove è decrescente,

d) dire dove $f(x)$ ha concavità verso l'alto e e dove ha concavità verso il basso.

13. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = 3 + |x^2 - 1|.$$

14. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{x^2}{4}.$$

   a) Specificare il dominio di $f(x)$ e i limiti agli estremi del dominio.
   b) Precisare le coordinate degli eventuali punti di massimo e minimo relativo e degli eventuali punti di flesso.
   c) Dire dove la funzione è crescente e decrescente, dove la concavità è rivolta verso l'alto e verso il basso.
   d) Tracciare il grafico di $f(x)$.

15. Si consideri la funzione

$$f(x) = x + \ln(x - 3).$$

   a) Specificare il dominio di $f(x)$ e i limiti agli estremi del dominio.
   b) Dire dove la funzione è crescente e decrescente, e dove la concavità è rivolta verso l'alto e verso il basso.
   c) Ci sono estremi relativi? Ci sono punti di flesso?
   d) Tracciare il grafico di $f(x)$.

16. Si consideri la funzione

$$f(x) = \ln\left[(1 - x^2)^2\right].$$

   a) Specificare il dominio di $f(x)$ e i limiti agli estremi del dominio.
   b) Precisare le coordinate degli eventuali punti di massimo e minimo relativo e degli eventuali punti di flesso.
   c) Tracciare il grafico di $f(x)$.
   d) Calcolare i punti di estremo assoluto di $f(x)$ nell'intervallo chiuso e limitato $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

17. Data la funzione

$$f(x) = e^{\frac{3x+4}{x}},$$

   a) precisarne il dominio e i limiti agli estremi del dominio;
   b) calcolarne gli eventuali asintoti;
   c) dire in quali intervalli è crescente e decrescente;
   d) dire in quali intervalli è concava e convessa e calcolarne gli eventuali punti di flesso;
   e) tracciarne il grafico.

18. Data la funzione

$$f(x) = x + \ln\frac{1}{2x + 4},$$

   a) precisarne il dominio e i limiti agli estremi del dominio;
   b) dire in quali intervalli è crescente e decrescente;
   c) calcolarne gli eventuali punti di estremo relativo;
   d) dire in quali intervalli è concava e convessa;
   e) calcolarne il massimo e minimo assoluti nell'intervallo $[0, 3]$.

19. Data la funzione
$$f(x) = \frac{e^{8x+3}}{e^{x^2}},$$
   a) precisarne il dominio e i limiti agli estremi del dominio;
   b) dire in quali intervalli è crescente e decrescente;
   c) calcolarne gli eventuali punti di estremo relativo;
   d) calcolarne gli eventuali punti di flesso;
   e) dire in quali intervalli è concava e convessa.

20. Data la funzione
$$f(x) = \ln\left(\frac{3}{1+x^2}\right),$$
   a) precisarne il dominio e i limiti agli estremi del dominio;
   b) dire in quali intervalli è crescente e decrescente e calcolare le coordinate degli eventuali punti di estremo relativo;
   c) dire in quali intervalli è concava e convessa e calcolare le coordinate degli eventuali punti di flesso;
   d) calcolare le ascisse dei punti in cui $f(x)$ si annulla;
   e) tracciarne il grafico.

21. Data la funzione
$$f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2},$$
   a) precisarne il dominio e i limiti agli estremi del dominio;
   b) dire in quali intervalli è crescente e decrescente e calcolare le coordinate degli eventuali punti di estremo relativo;
   c) dire in quali intervalli è concava e convessa e calcolare le coordinate degli eventuali punti di flesso.

22. Data la funzione
$$f(x) = \frac{x}{e^{2x}},$$
   a) precisarne il dominio e i limiti agli estremi del dominio;
   b) dire in quali intervalli è crescente e decrescente e calcolarne gli eventuali estremi relativi;
   c) dire in quali intervalli è concava e convessa e calcolarne gli eventuali punti di flesso;
   d) tracciarne il grafico;
   e) scrivere l'equazione della retta tangente al grafico nel suo punto di ascissa $x = 1$.

23. Data la funzione
$$f(x) = \frac{3-5x}{x^2},$$
   a) precisarne il dominio e i limiti agli estremi del dominio;
   b) dire in quali intervalli è crescente e decrescente e calcolarne gli eventuali estremi relativi;
   c) dire in quali intervalli è concava e convessa e calcolarne gli eventuali punti di flesso;
   d) tracciarne il grafico.

24. Data la funzione
$$f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{x+1},$$

a) dire se è pari, dispari o né pari né dispari;
b) precisarne il dominio e i limiti agli estremi del dominio;
c) dire in quali intervalli è crescente e decrescente e calcolarne gli eventuali estremi relativi;
d) usando i dati a disposizione, tracciarne un possibile grafico;
e) calcolare $\int_0^1 f(x)\,dx$.

25. Data la funzione
$$f(x) = 1 + \frac{1}{x^2 + x + 2}$$
a) precisare il dominio e discutere il segno;
b) dire se è pari, dispari e calcolare i limiti agli estremi del dominio;
c) dire in quali intervalli è crescente e decrescente e calcolarne gli eventuali estremi relativi;
d) dire in quali intervalli è concava e convessa (concavità verso il basso o verso l'alto), specificando gli eventuali punti di flesso;
e) tracciarne il grafico.

26. Data la funzione
$$f(x) = x\ln(x)$$
a) precisare il dominio, discutere il segno e calcolare i limiti agli estremi del dominio;
b) dire in quali intervalli è crescente e decrescente e calcolarne gli eventuali estremi relativi (sia le ascisse che le ordinate);
c) dire in quali intervalli è concava e convessa, specificando gli eventuali punti di flesso;
d) tracciarne il grafico.

27. Data la funzione
$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)$$
a) precisare il dominio, discutere il segno e calcolare i limiti agli estremi del dominio;
b) dire in quali intervalli è crescente e decrescente e calcolarne gli eventuali estremi relativi (sia le ascisse che le ordinate);
c) dire in quali intervalli è concava e convessa, specificando gli eventuali punti di flesso;
d) tracciarne il grafico.

28. Data la funzione
$$f(x) = x\,e^{-x}$$
a) precisare il dominio, discutere il segno e calcolare i limiti agli estremi del dominio;
b) dire in quali intervalli è crescente e decrescente e calcolarne gli eventuali estremi relativi (sia le ascisse che le ordinate);
c) dire in quali intervalli è concava e convessa, specificando gli eventuali punti di flesso;
d) tracciarne il grafico.

29. Data la funzione
$$f(x) = x + \frac{1}{x^2}\,,$$
a) precisare il dominio, discutere il segno e calcolare i limiti agli estremi del dominio;
b) dire in quali intervalli è crescente e decrescente e calcolarne gli eventuali estremi relativi (sia le ascisse che le ordinate);

c) dire in quali intervalli è concava e convessa, specificando gli eventuali punti di flesso;

d) tracciarne il grafico.

30. Data la funzione
$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

a) precisare il dominio e discutere il segno;
b) calcolare i limiti agli estremi del dominio;
c) studiare crescenza, decrescenzaed estremi relativi;
d) studiare concavità, covessità e flessi;
e) tracciarne il grafico.

31. Data la funzione
$$f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$$

a) precisare il dominio;

b) calcolare i limiti agli estremi del dominio;

c) dire in quali intervalli è crescente e decrescente e calcolarne gli eventuali estremi relativi;

d) dire in quali intervalli è concava e convessa (concavità verso il basso o verso l'alto), specificando gli eventuali punti di flesso;

e) tracciarne il grafico.

32. Data la funzione
$$f(x) = \ln\left[x(x-1)\right]$$

a) precisare il dominio e discutere il segno;

b) dire se è pari, dispari e calcolare i limiti agli estremi del dominio;

c) dire in quali intervalli è crescente e decrescente e calcolarne gli eventuali estremi relativi;

d) dire in quali intervalli è concava e convessa (concavità verso il basso o verso l'alto), specificando gli eventuali punti di flesso;

e) tracciarne il grafico.

8 Polinomi di Taylor

1. Sia $p_2(x)$ il polinomio di Taylor di grado 2 per
$$f(x) = e^{3x}$$
intorno al punto $x_0 = 0$. Calcolare $p_2(2)$.
2. Sia $p_2(x)$ il polinomio di Taylor di grado 2 per
$$f(x) = x + e^x$$
intorno al punto $x_0 = 0$. Calcolare $p_2(3)$.
3. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 per
$$f(x) = x^3 + 2x + 1$$
intorno al punto $x_0 = 0$.
4. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 per
$$f(x) = \cos(2x)$$
intorno al punto $x_0 = 0$.
5. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 per
$$f(x) = 3 \ln x$$
intorno al punto $x_0 = 3$.
6. Sia $p_2(x)$ il polinomio di Taylor di grado 2 per
$$f(x) = \ln(2x + 3)$$
intorno al punto $x_0 = 0$. Calcolare $p_2(6)$.
7. Sia $p_2(x)$ il polinomio di Taylor di grado 2 per
$$f(x) = e^{2x}$$
intorno al punto $x_0 = 0$. Calcolare $p_2(3)$.
8. Sia $p_2(x)$ il polinomio di Taylor di grado 2 per
$$f(x) = \ln(2x)$$
intorno al punto $x_0 = 1$. Calcolare $p_2(2)$.

9 Integrali

1. Calcolare l'area della regione di piano compresa fra l'asse x, le rette $x = 0$ e $x = 1$ e il grafico della funzione $f(x) = x\, e^{x^2+3}$.

2. Dire se il seguente integrale converge o diverge e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_0^1 x \ln x^6 \, dx$$

(giustificare il passaggio al limite necessario a risolvere l'esercizio).

3. Dire se il seguente integrale improprio esiste e, se esiste, calcolarne il valore:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{2^x} \, dx.$$

4. Calcolare

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} \, dx.$$

5. Calcolare l'area della regione del semipiano $x \geq 0$ compresa fra l'asse x, la retta $3x - y = 0$ e la parabola $y = -x^2 + 4$.

6. Calcolare

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + e} \, dx.$$

7. Calcolare l'integrale

$$\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}} \, dx.$$

Dire se l'integrale

$$\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}} \, dx$$

converge o diverge e, se converge, calcolarne il valore.

8. Sapendo che $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = 1$, calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 2e^{-\frac{x^2}{2}} 3x^2 \, dx$.

9. Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_1^2 \frac{12\, x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx \qquad\qquad \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$$

10. Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx \qquad\qquad 4 \int_1^2 x \ln x \, dx$$

11. Dire se il seguente integrale improprio esiste e, se esiste, calcolarne il valore:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{3^x} \, dx.$$

12. Calcolare, se esiste, il seguente integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{6x+3}{e^{x^2+x}}\,dx.$$

13. Calcolare $\int_0^1 (6x+3)\,e^x\,dx$.

14. Calcolare, se esiste, il seguente integrale:

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx.$$

15. Qual è la funzione $f(x)$ il cui grafico passa per il punto di coordinate $(0,1)$ e la cui derivata è $\dfrac{6x}{3x^2+1}$?

16. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^e x^2 \ln x\,dx.$$

17. Si calcoli il valore del seguente integrale

$$\int_1^{+\infty} 11e^{-x}x\,dx$$

18. Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^2 2e^{\sqrt{x^3+1}}\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx\,.$$

19. Calcolare l'area della regione di piano compresa fra la parabola di equazione $y=-x^2+2x$ e la retta di equazione $y=\frac{1}{2}x$.

20. Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_2^4 [\ln(x^3)+x]\,dx\,.$$

21. Calcolare il valore dei seguenti integrali:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \qquad\qquad \int_2^4 \ln(2x)\,dx.$$

22. Calcolare l'area di piano compresa fra l'asse x e la curva di equazione $y=-x^2+9$.

23. Calcolare la primitiva della funzione

$$f(x)=1+xe^{1-x^2}$$

che vale $3/2$ in $x=1$.

24. Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_2^3 \ln\frac{1}{x}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{8x}{3x^2+4}\,dx.$$

25. Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ continua. Per ogni $x \in [a, b]$, si definisca la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Allora F è

$\boxed{\mathbf{a}}$ continua ma non derivabile in (a, b) $\boxed{\mathbf{b}}$ derivabile ma non continua in (a, b)

$\boxed{\mathbf{c}}$ continua e derivabile in (a, b) $\boxed{\mathbf{d}}$ né continua né derivabile in (a, b).

26. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^2 (xe^{x^2+1} - 3)\, dx.$$

27. Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{x}{3x^2 + 1}\, dx.$$

28. Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^3 \left(\frac{4}{x} + 2\right)\, dx.$$

29. Calcolare la primitiva della funzione

$$f(x) = e^{2x} + 1$$

che, per $x = 0$, vale 1.

30. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx.$$

31. Calcolare il seguente integrale (esprimere il risultato con 3 cifre decimali):

$$\int_0^1 \frac{3x^2}{x^3 + 2}\, dx.$$

32. Calcolare il seguente integrale (esprimere il risultato con 3 cifre decimali):

$$\int_0^{\sqrt{2}} xe^{x^2}\, dx.$$

33. Calcolare l'integrale

$$\int_0^2 \frac{3}{x+1}\, dx$$

34. Calcolare la primitiva (antiderivata) della funzione

$$f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}, \qquad x > 0$$

che vale 2 in $x = 4$.

10 Domande Teoriche sulle Funzioni

1. Sia $f : [0, 5] \to \mathbf{R}$ continua e invertibile e tale che $f(2) = 0$. Allora

   $\boxed{\text{a}}$ $f(0)f(5) = 0$ $\boxed{\text{b}}$ $f(0)/f(5) > 0$ $\boxed{\text{c}}$ $f(0)f(5) < 0$ $\boxed{\text{d}}$ $f(0)/f(5) = 1$.

2. Sia $f : [0, 5] \to \mathbf{R}$ continua. Allora f è integrabile su $[0, 5)]$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

3. Sia f una funzione tale che

   $$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{f(x)} = 3.$$

   Allora

   $\boxed{\text{a}}$ f è continua in $x = 2$ $\boxed{\text{b}}$ non esiste $\lim_{x\to 2} f(x)$
   $\boxed{\text{c}}$ non esiste $\lim_{x\to 2^+} 1/f(x)$ $\boxed{\text{d}}$ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$.

4. f dispari implica f^3 dispari. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

5. Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$ e derivabile nell'intervallo (a, b). Allora
   $\boxed{\text{a}}$ $\exists c \in [a, b]$ t.c. $f(c) = \dfrac{f'(b) - f'(a)}{b - a}$;
   $\boxed{\text{b}}$ $\exists c \in [a, b]$ t.c. $f'(c) = 0$;
   $\boxed{\text{c}}$ f non può essere costante in $[a, b]$;
   $\boxed{\text{d}}$ f ammette massimo assoluto in $[a, b]$.

6. Se f è integrabile in (a, b), allora f è continua in (a, b). $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

7. Sia $f(x) = |(x - 1)^2 - 1|$. Allora f è

   $\boxed{\text{a}}$ continua $\boxed{\text{b}}$ discontinua $\boxed{\text{c}}$ derivabile $\boxed{\text{d}}$ pari

8. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabile e crescente. Sia $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione integrale

   $$F(t) = \int_0^t f(x)\, dx\,.$$

   Allora F è

   $\boxed{\text{a}}$ dispari $\boxed{\text{b}}$ convessa $\boxed{\text{c}}$ concava $\boxed{\text{d}}$ pari

9. Sia $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ crescente. Se $x = 0$ è un punto di massimo assoluto allora f è costante. $\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$

10. Sia $f : (0, 1] \to \mathbf{R}$ continua. Allora
    $\boxed{\text{a}}$ f è derivabile in $(0, \frac{1}{2}]$. $\boxed{\text{b}}$ f è integrabile in $[\frac{1}{2}, 1]$.
    $\boxed{\text{c}}$ f è integrabile in $(0, \frac{1}{2}]$. $\boxed{\text{d}}$ f è derivabile in $(\frac{1}{2}, 1)$.

11. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ strettamente crescente. Allora $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. $\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$

12. Sia $f(x) = |x + 1| - 1$. Allora

    $\boxed{\text{a}}$ f è continua e invertibile. $\boxed{\text{b}}$ f è discontinua e non invertibile.
    $\boxed{\text{c}}$ f è continua e non invertibile. $\boxed{\text{d}}$ f è discontinua e invertibile.

13. Sia f integrabile su $[a, b]$. Allora $\displaystyle\int_a^b [-2f(x) - 1]\, dx = -2 \int_a^b f(x)\, dx - (b - a)\,.$

$\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$

14. Sia $f(x) = \ln(x - 2)$. Allora il dominio di f è

$\boxed{\mathbf{a}}$ $[0, +\infty)$. $\boxed{\mathbf{b}}$ $[0, 2) \cup (2, +\infty)$

$\boxed{\mathbf{c}}$ $(2, +\infty)$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $(-2, +\infty)$.

15. Sia $f(x) = x^{1.54}$. Allora $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. $\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$

16. Sia f una funzione continua in $(0, +\infty)$. Allora

$\boxed{\mathbf{a}}$ f è integrabile in $(0, 1)$. $\boxed{\mathbf{b}}$ f è derivabile in $(0, 1)$. $\boxed{\mathbf{c}}$ f è derivabile in $[1, 10]$. $\boxed{\mathbf{d}}$ f è limitata in $[1, 10]$.

17. Sia $f : (-\infty, 0) \to \mathbf{R}$ crescente. Allora $\lim_{x\to0^-} f(x) = 1$. $\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$

18. Sia f una funzione continua in $[1, 2]$ e derivabile in $(1, 2)$ con $f' > 0$. Allora f

$\boxed{\mathbf{a}}$ ha min in $x = 2$ $\boxed{\mathbf{b}}$ non ha min

$\boxed{\mathbf{c}}$ ha max in $x = 2$ $\boxed{\mathbf{d}}$ non ha max

19. Sia f una funzione integrabile su $[-1, 1]$. Allora

$\boxed{\mathbf{a}}$ se f è pari, $\int_{-1}^0 f(x)\, dx = -\int_0^1 f(x)\, dx$

$\boxed{\mathbf{b}}$ se f è dispari, $\int_{-1}^1 f(x)\, dx = 2\int_0^1 f(x)\, dx$

$\boxed{\mathbf{c}}$ se f è pari, $\int_{-1}^1 f(x)\, dx = 0$

$\boxed{\mathbf{d}}$ se f è dispari, $\int_{-1}^1 f(x)\, dx = 0$

20. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile. Se $f' = 0$ allora $f = 0$. $\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$

21. Sia f una funzione continua in $[0, +\infty)$ e derivabile in $(0, +\infty)$ con $f' > 0$. Allora

$\boxed{\mathbf{a}}$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\boxed{\mathbf{c}}$ f ha un minimo $\boxed{\mathbf{d}}$ f ha un massimo

22. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua e derivabile, tale che $f(x) > 0$ in $(-\infty, 0)$ e $f(x) < 0$ in $(0, +\infty)$. Allora $\boxed{\mathbf{a}}$ $f(0) \geq 0$ e $f'(0) \leq 0$

$\boxed{\mathbf{b}}$ $f(0) \geq 0$ e $f'(0) \geq 0$

$\boxed{\mathbf{c}}$ $f(0) \leq 0$ e $f'(0) > 0$

$\boxed{\mathbf{d}}$ $f(0) < 0$ e $f'(0) < 0$

23. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pari e derivabile. Allora f' è

$\boxed{\mathbf{a}}$ pari $\boxed{\mathbf{b}}$ dispari $\boxed{\mathbf{c}}$ crescente $\boxed{\mathbf{d}}$ decrescente