Analisi Matematica I - 16/09/14 - Tempo a disposizione: 3h
Cognome e Nome - Firma

A1. * Sia $g(x) = 5\cos^2(x)\sin(x) + 1$, Determinare il numero dei punti stazionari della funzione g nell'intervallo $(0, 2\pi)$. [ ]

A2. I. Stabilire se $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + \sin(2x)}{6n^6 + e^{-n} + \arctan n}$ converge o diverge. [ ]

II. Stabilire se $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(2x)}{6x}\, dx$ converge o diverge. [ ]

A3. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $F(x) = \displaystyle\int_0^x 2e^{t^2} dt$ nel punto $(0, F(0))$. [ ]

A4. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\arctan(-2x^3) + e^{12x^3}}{12x^3 + \sin(15x^3)}$ [ ]

A5. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} (5^{2x} + 2)\, dx$ [ ]

A6. Determinare i parametri m e q in modo tale che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3\sin(-4x) & \text{se } x \le 0 \\ mx + q & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

risulti di classe $C^0(\mathbb{R})$ [ ] e di classe $C^1(\mathbb{R})$ [ ]

A7. Sia $f(x) = \ln(2 + x) + \arctan(x^2 + e^{-x})$. Si calcoli $f'(0)$. [ ]

A8. Trovare le soluzioni reali dell'equazione $(\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, \bar{z})z = 4$. [ ]

A9. Calcolare, al variare del parametro reale α, $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \int_x^1 (2t + t^{-\alpha})dt$

[ ]

A10. * Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'' - 6u' + 13u = 0 & \text{in } (0 + \infty) \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = -1. \end{cases}$$

[ ]

B1. Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \ln(x)$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f non è nè iniettiva nè suriettiva $\boxed{\text{B}}$ f è iniettiva e suriettiva $\boxed{\text{C}}$ f è iniettiva ma non suriettiva $\boxed{\text{D}}$ f non è iniettiva ma è suriettiva.

B2. Sia I un intervallo in $\mathbb{R}$. Sotto quali ipotesi $f : I \to \mathbb{R}$ ammette massimo e minimo assoluti in I? $\boxed{\text{A}}$ f è limitata e I è chiuso e limitato $\boxed{\text{B}}$ $f \in C^0(I)$ $\boxed{\text{C}}$ I è chiuso e limitato $\boxed{\text{D}}$ I è chiuso e limitato e $f \in C^0(I)$.

B3. Sia u soluzione dell'equazione $u'(x) = f(u(x))$ in $\mathbb{R}$, dove $f > 0$ e monotona decrescente. Allora $\boxed{\text{A}}$ $u \geq 0$ $\boxed{\text{B}}$ u è monotona crescente $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0$ $\boxed{\text{D}}$ u è monotona decrescente.

B4. Sia a_n una successione reale monotona decrescente. Allora $\boxed{\text{A}}$ a_n è limitata $\boxed{\text{B}}$ esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n$ $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{n\to+\infty} e^{a_n} = 0$ $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

B5. Siano z_1 e z_2 le radici complesse dell'equazione $z^2 + 3z + 5 = 0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $Im(z_1)Im(z_2) = 0$ $\boxed{\text{B}}$ $Re(z_1) + Re(z_2) = 0$ $\boxed{\text{C}}$ $Im(z_1) - Im(z_2) = 0$ $\boxed{\text{D}}$ $Re(z_1) - Re(z_2) = 0$.

B6. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua e sia $F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt$, per $x_0 \in (a, b)$ e $x \in (a, b)$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $F \in C^1(a, b)$ $\boxed{\text{B}}$ F è convessa $\boxed{\text{C}}$ $F \in C^2(a, b)$ $\boxed{\text{D}}$ F è monotona.

B7. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitata. Allora $\boxed{\text{A}}$ se $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ allora $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ $\boxed{\text{B}}$ esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ $\boxed{\text{C}}$ f è integrabile in ogni intervallo (a, b) $\boxed{\text{D}}$ se f è integrabile in ogni intervallo (a, b) allora f è continua.

B8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e periodica di periodo $T > 0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f ha massimo e minimo $\boxed{\text{B}}$ f è integrabile in $(0, +\infty)$ $\boxed{\text{C}}$ f è derivabile $\boxed{\text{D}}$ f è monotona.

B9. Siano $f, g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to0^+} g(x) = -\infty$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{x\to0^+} \big(g(x)f(x)\big)^3 = -\infty$ $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{x\to0^+} \big(g(x) + f(x)\big)^2 = -\infty$ $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{x\to0^+} \big(f(x)/g(x)\big)^3 = +\infty$ $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{x\to0^+} \big(f(x)/g(x)\big)^2 = +\infty$.

B10.* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x + 1) \geq f(x) + e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$ per $n \in \mathbb{N}$ $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\boxed{\text{D}}$ f è monotona.

Soluzioni della prova del 16/09/14

Parte A

A1. 6

A2. converge

A3. $y = 2x$

A4. 0

A5. $4 + (5^2 - 5^{-2})/\ln(5^2)$

A6. $q = 0$ e ogni $m \in \mathbb{R}$; $q = 0$ e $m = -12$

A7. 0

A8. ± 2

A9. $1 + 1/(1 - \alpha)$ se $\alpha < 1$; $+\infty$ se $\alpha \geq 1$

A10. $u(t) = e^{3t}(\cos 2t - 2\sin 2t)$

Parte B

B1. B

B2. D

B3. B

B4. B

B5. D

B6. A

B7. A

B8. A

B9. A

B10. B