Analisi Matematica I - 24/02/15 - Tempo a disposizione: 3h
Cognome e Nome - Firma

A1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{2x} + 3x$ e sia $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la sua inversa. Calcolare la derivata di f^{-1} nel punto $e^2 + 3$.

A2.* Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+4}{\sin x + e^{-x}} + \frac{e^{-1/x^2} + x\cos(1/x^2)}{2^x}\right)$$

A3. Calcolare e classificare i punti stazionari della funzione $f(x) = \dfrac{4x-3}{1+x^2}$.

A4. Stabilire se la seguente serie è convergente o divergente

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(n) + 2^n}{3^n + 3n}$$

A5.* Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n}\int_0^n \frac{1}{x+1}\,dx.$$

A6. Si scriva il polinomio di Taylor $T_3^2(x)$ di ordine 2 e centro $x_0 = 3$ per la funzione $f(x) = 2\sin(x-3) + 3\cos(x-3)$.

A7.* Sia $F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^x (5e^{-t^2} - 3)\,dt$. Si stabilisca il numero degli zeri di F in $[0, +\infty)$.

A8.* Risolvere l'equazione differenziale $u'(t) + \dfrac{t}{1+t^2}u(t) = 0$

e il pb. di Cauchy $\begin{cases} u'(t) + \dfrac{t}{1+t^2}u(t) = 6t \\ u(0) = 1. \end{cases}$

A9. Scrivere in forma algebrica il numero complesso $z = (i+\sqrt{3})^3$.

A10. Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

B1. Sia $f(x) = 2x + c$ se $x \geq 0$ e $f(x) = 2e^{-3x}$ se $x < 0$. Affinché f sia continua in tutto $\mathbb{R}$ deve essere $\boxed{A}$ $c = 3$ $\boxed{B}$ $c = 2$ $\boxed{C}$ $c = 1$ $\boxed{D}$ $c = 0$.

B2. Sia $f(x) = 2+3x-3x^2+o(x^2)$ per $x \to 0$. Allora, in un intorno di $x = 0$, f $\boxed{A}$ è decrescente $\boxed{B}$ è convessa $\boxed{C}$ ammette almeno un punto stazionario $\boxed{D}$ è crescente.

B3. Sia $f \in C^0([0,2])$. Allora $\boxed{A}$ $\exists\, x_0 \in [0,2]$ tale che $2f'(x_0) = f(2) - f(0)$ $\boxed{B}$ $\forall x_0 \in [0,2]$ $f(x_0) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 f(t)dt$ $\boxed{C}$ $\exists\, x_0 \in [0,2]$ tale che $2f(x_0) = \displaystyle\int_0^2 f(t)dt$ $\boxed{D}$ $\exists x_0 \in [0,2]$ tale che $f(x_0) = 2\displaystyle\int_0^2 f(t)dt$.

B4. * Si consideri la funzione $g(x) = |f(x)|$, dove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile. Allora la funzione g è $\boxed{A}$ non continua $\boxed{B}$ continua $\boxed{C}$ continua e derivabile $\boxed{D}$ continua e non derivabile.

B5. Sia $f(x) = \sin(g(x))$, dove $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile e $g'(x) > 0$. Allora l'insieme dei punti stazionari di f è $\boxed{A}$ $\{x : g(x) = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ $\boxed{B}$ l'insieme vuoto $\boxed{C}$ $\{x : g(x) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ $\boxed{D}$ $\{x : g(x) = 0\}$.

B6.* Sia $u(x)$ soluzione dell'equazione differenziale $u'(x) = f(u) + 1$, con $f > 0$. Allora $\boxed{A}$ u è crescente $\boxed{B}$ u è convessa $\boxed{C}$ u è decrescente $\boxed{D}$ u è concava.

B7. Sia $f \in C^0([a,b])$ tale che $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$. Allora $\boxed{A}$ $\exists\, c \in [a,b] : f(c) = 0$ $\boxed{B}$ $\exists\, c \in [a,b] : f'(c) = 0$ $\boxed{C}$ $\exists\, c \in [a,b] : f'(c) < 0$ $\boxed{D}$ $\exists!\, c \in [a,b] : f(c) = 0$.

B8. * Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$. Allora $\boxed{A}$ se a_n è crescente e $a_n \to 0$ allora la serie converge $\boxed{B}$ se $a_n \to 1$ la serie diverge $\boxed{C}$ se $a_n \to 0$ la serie converge $\boxed{D}$ se a_n è decrescente la serie converge.

B9. L'equazione $z^3 = 3$ $\boxed{A}$ ammette 2 radici in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $\boxed{B}$ ammette 4 radici in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $\boxed{C}$ ammette 5 radici in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $\boxed{D}$ ammette 3 radici in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

B10.* Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$. Allora, per $n \to +\infty$, la successione $b_n = f(2n)$ $\boxed{A}$ converge a l $\boxed{B}$ converge a $l+2$ $\boxed{C}$ converge a $2l$ $\boxed{D}$ converge a $\dfrac{l}{2}$.

Soluzioni della prova del 24/02/2015

Parte A

A1. $1/(2e^2+3)$

A2. 4

A3. $x_m = -1/2$ e $x_M = 2$

A4. converge

A5. 0

A6. $T(x) = 2(x-3) + 3 - (3/2)(x-3)^2$

A7. 2

A8. $u(t) = c(1+t^2)^{-1/2}$ e $u(t) = -(1+t^2)^{-1/2} + 2(1+t^2)$

A9. $8i$

A10. $\pi/2$

Parte B

B1. B

B2. D

B3. C

B4. B

B5. C

B6. A

B7. A

B8. A

B9. A

B10. A