Analisi Matematica I - 23/02/16 - Tempo a disposizione: 3h
Matricola **Cognome e Nome**

A1.* Calcolare il seguente limite: $\lim_{n\to+\infty} \frac{-3n^3 - 2\sin n}{\sqrt{2n^6 - 2n^5 + 1}} + 3\,\frac{\ln(n+4)}{\ln n}$

A2. Sia u la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = 4u(x), \\ u(2) = -3. \end{cases}$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di u nel punto di ascissa $x = 2$.

A3. Calcolare $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{(5+2\sin x)^2} \cos x \, dx.$

A4. Stabilire se la seguente serie converge o diverge: $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{5e^{-1/n}+3}{6n^6+5\sqrt{n}}$

A5.* Sia $f(x) = e^{|x^2-5x+6|}$. Determinare i punti di minimo assoluto e il punto di massimo relativo di f in $\mathbb{R}$.

A6. Calcolare il polinomio di MacLaurin di grado 2 della funzione $f(x) = -3\sqrt{1+5x^2}$.

A7.* Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{1}{2}u''(x) + 2u'(x) + 2u(x) = 0 \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 1 \end{cases}$$

A8. Stabilire se il seguente integrale diverge o converge: $\int_0^1 \frac{\cos x}{x^2}\, dx$

A9. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $4(z^4+5)(z-4)^4 = 0$ (rappresentare i risultati in forma esponenziale).

A10.* Sia $f(x) = 0$ per $x = 0$ e $f(x) = x(3 + x\sin(-3/x))$ per $x \neq 0$. Si calcoli $f'(0)$ usando la definizione di derivata.

B1.* Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tale che $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}<0$ per ogni $x_1\neq x_0$. Allora f è $\boxed{\text{A}}$ invertibile $\boxed{\text{B}}$ derivabile $\boxed{\text{C}}$ concava $\boxed{\text{D}}$ monotona crescente.

B2. * Siano f e g due funzioni continue su $[0,1]$ tali che $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx$. Allora $\boxed{\text{A}}$ esistono $a,b\in[0,1]$, con $a<b$, tali che $f(x)=g(x)$ per ogni $x\in[a,b]$ $\boxed{\text{B}}$ $\int_0^{1/2} f(x)\,dx=\int_0^{1/2} g(x)\,dx$ $\boxed{\text{C}}$ esiste $x_0\in[0,1]$ tale che $f(x_0)=g(x_0)$ $\boxed{\text{D}}$ $f(x)=g(x)$ per ogni $x\in[0,1]$.

B3. Il periodo delle funzione $f(x)=4\sin(7x)$ è $\boxed{\text{A}}$ 7π $\boxed{\text{B}}$ 7 $\boxed{\text{C}}$ π $\boxed{\text{D}}$ $2\pi/7$.

B4.* Sia a_n una successione reale tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n=\ell\in\mathbb{R}$. Allora definitivamente (per $n\to+\infty$) si ha $\boxed{\text{A}}$ $-1/2<a_n-\ell\leq 0$ $\boxed{\text{B}}$ $a_n-\ell\geq 0$ $\boxed{\text{C}}$ $|a_n-\ell|<1/2$ $\boxed{\text{D}}$ $a_n-\ell<0$.

B5. Sia a_n una successione reale tale che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converga. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+1)$ converge $\boxed{\text{B}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}-a_n$ diverge $\boxed{\text{C}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}2a_n$ converge $\boxed{\text{D}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ converge.

B6. Sia $F(x)=\int_0^x e^{-4t^2+1}\sin t\,dt$. Allora il numero di punti stazionari di F in $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ è $\boxed{\text{A}}$ due $\boxed{\text{B}}$ uno $\boxed{\text{C}}$ tre $\boxed{\text{D}}$ zero.

B7. Se $f(x)=o(g(x))$ per $x\to x_0$, allora $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f^2(x)}{g^2(x)}$ $\boxed{\text{A}}$ è uguale a 1 $\boxed{\text{B}}$ è uguale a 0 $\boxed{\text{C}}$ non esiste $\boxed{\text{D}}$ è uguale a $+\infty$.

B8. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabile, tale che $f(-1)=1$, $f(1)=-1$. Allora $\boxed{\text{A}}$ esiste $x\in(-1,1)$ tale che $f'(x)=-1$ $\boxed{\text{B}}$ $f'(x)\leq 0\ \forall x\in(-1,1)$ $\boxed{\text{C}}$ f è dispari $\boxed{\text{D}}$ esiste $x\in(-1,1)$ tale che $f'(x)=0$.

B9. Sia $f(x)=0$ se $x\leq 0$ e $f(x)=x^\alpha$ se $x>0$. Affinché f sia derivabile in tutto $\mathbb{R}$ deve essere $\boxed{\text{A}}$ $\alpha=1$ $\boxed{\text{B}}$ $\alpha>1$ $\boxed{\text{C}}$ $\alpha\in(0,1)$ $\boxed{\text{D}}$ $\alpha\leq 0$.

B10. Sia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continua. Allora $\boxed{\text{A}}$ esistono almeno due punti $x_0,x_1\in(0,1)$ tali che $f'(x_0)=0=f'(x_1)$ $\boxed{\text{B}}$ esiste $x_0\in(0,1)$ tale che $f(x)\geq f(x_0)\ \forall x\in(0,1)$ $\boxed{\text{C}}$ esiste un unico $x_0\in[0,1]$ tale che $f'(x_0)=0$ $\boxed{\text{D}}$ esiste $x_0\in[0,1]$ tale che $f(x)\geq f(x_0)\ \forall x\in(0,1)$.

Soluzioni della prova del 23/02/16

Parte A

A1. $-(3/\sqrt{2})+3$

A2. $y=-12x+21$

A3. $-1/35$

A4. converge

A5. pti. di min $x_0=1$ e $x_1=3$, pto di max $x_2=5/2$

A6. $p(x)=-3-(15/2)x^2$

A7. $u(x)=xe^{-2x}$

A8. diverge

A9. $z_k=\rho e^{i\theta_k}$ con $\rho=\sqrt[4]{5}$ e $\theta_k=\pi/4+k\pi/2$ per $k=0,1,2,3,$ $z_5=4$.

A10. 3

Parte B

B1. A

B2. C

B3. D

B4. C

B5. C

B6. B

B7. B

B8. A

B9. B

B10. D