**Analisi Matematica I - 07/09/17 - Tempo a disposizione: 3h**
**Matricola** **Cognome e Nome**

**A1.** Sia $z = 4(1-i)$. Scrivere in forma algebrica il numero complesso $\dfrac{z\bar{z} - 8z}{i}$.

**A2.** Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0, \\ y(0) = 5, \\ y'(0) = -6. \end{cases}$$

**A3.**$^\star$ Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(e^x - 1)^2 - 2x^2}{x^2 \sin(3x)\cos(x)}$.

**A4.** Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sin(e^n)}{\ln(2n)} + 2\arctan(n^2+3)\right)$.

**A5.**$^\star$ Calcolare (usando la sostituzione $e^x = t$) l'integrale $\displaystyle\int_0^{\ln 6} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$.

**A6.**$^\star$ Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \frac{e^{\frac{2}{n}} + 1}{n^\alpha (2n+1)^5}.$$

**A7.**$^\star$ Sia $f(x) = e^x$. Determinare, in funzione del parametro reale $c$, il numero di intersezioni tra il grafico di $f$ e la retta di equazione $y = x + c$.

**A8.** Calcolare il polinomio di Mac Laurin di grado 6 per la funzione $f(x) = 2\pi x^2 \cos(2x^2) + 3x\sin(-3x^2)$.

**A9.** Sia $f : [-\sqrt{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$. Determinare i punti di massimo e di minimo locali e globali di $f$ nell'intervallo $[-\sqrt{2}, \frac{1}{2}]$.

**A10.** Determinare i valori del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ per cui converge l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{(1-x)^{4\beta+3}}\,dx.$$

**B1.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione pari derivabile due volte. Allora $\boxed{\text{A}}$ $f'$ è pari e $f''$ è dispari $\boxed{\text{B}}$ $f'$ e $f''$ sono entrambe dispari $\boxed{\text{C}}$ $f'$ e $f''$ sono entrambe pari $\boxed{\text{D}}$ $f'$ è dispari e $f''$ è pari.

**B2.**$^\star$ Sia $(b_n)$ una successione reale positiva e sia $a_n = \ln(b_n)$. Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$ (con $\ell \in \mathbb{R}$), allora $\boxed{\text{A}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = e^\ell$ $\boxed{\text{B}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \ln(\ell)$ $\boxed{\text{C}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \ell\ln(\ell)$ $\boxed{\text{D}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

**B3.**$^\star$ Sia $f(x) = x+x^2+o(x^2)$ per $x \to 0$. Allora, per $x \to 0$ si ha che: $\boxed{\text{A}}$ $e^{f(x)} = 1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$ $\boxed{\text{B}}$ $e^{f(x)} = 1+x+\frac{3}{2}x^2+o(x^2)$ $\boxed{\text{C}}$ $e^{f(x)} = 1+x+2x^2+o(x^2)$ $\boxed{\text{D}}$ $e^{f(x)} = 1+x+x^2+o(x^2)$.

**B4.**$^\star$ Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e strettamente monotona. $\boxed{\text{A}}$ Se $f(a)f(b) < 0$, allora esiste un unico $c \in (a,b)$ con $f(c) = 0$ $\boxed{\text{B}}$ Se $f(a)f(b) > 0$, allora esiste $c \in (a,b)$ con $f'(c) = 0$ $\boxed{\text{C}}$ Se $f(a)f(b) > 0$, allora esiste $c \in (a,b)$ con $f(c) = 0$ $\boxed{\text{D}}$ Se $f(a)f(b) < 0$, allora esiste un unico $c \in (a,b)$ con $f'(c) = 0$.

**B5.** Sia $f(x) = |\cos(x)|$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $f$ è periodica e monotona $\boxed{\text{B}}$ $f$ è limitata e periodica $\boxed{\text{C}}$ $f$ è monotona e limitata $\boxed{\text{D}}$ $f$ è iniettiva e periodica.

**B6.** Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[0,1]$, derivabile in $(0,1)$ e tale che $f(0) > 0$ e $f(1) < 1$. Allora esiste un punto $x_0 \in (0,1)$ tale che $\boxed{\text{A}}$ $f'(x_0) < 1$ $\boxed{\text{B}}$ $f'(x_0) = 1$ $\boxed{\text{C}}$ $f'(x_0) > 0$ $\boxed{\text{D}}$ $f'(x_0) = 0$.

**B7.** Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $g(x) = 2f(2x)$. Allora $\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)\,dx$ è uguale a $\boxed{\text{A}}$ $\int_0^1 f(x)\,dx$ $\boxed{\text{B}}$ $2\int_0^1 f(x)\,dx$ $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx$ $\boxed{\text{D}}$ $2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$.

**B8.** $^\star$ Sia $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $f$ ha massimo e minimo assoluti in $[0,+\infty)$ $\boxed{\text{B}}$ $f$ è limitata $\boxed{\text{C}}$ $f(x) \le \ell$ definitivamente per $x \to +\infty$ $\boxed{\text{D}}$ $f(x) \ge \ell$ definitivamente per $x \to +\infty$.

**B9.** Sia $f$ una funzione derivabile in $x_0 = 1$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $f'(1) = \lim\limits_{h\to0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ $\boxed{\text{B}}$ $f'(1) = \lim\limits_{h\to0} \frac{f(1+h)-f(h)}{h}$ $\boxed{\text{C}}$ $f'(1) = \lim\limits_{h\to0} \frac{f(h)+f(1)}{h}$ $\boxed{\text{D}}$ $f'(1) = \lim\limits_{h\to0} \frac{f(h)-f(1)}{h}$.

**B10.** La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n}$ $\boxed{\text{A}}$ diverge per il criterio di Leibniz $\boxed{\text{B}}$ diverge per il criterio del confronto asintotico $\boxed{\text{C}}$ converge per il criterio del confronto $\boxed{\text{D}}$ converge per il criterio di Leibniz.

**Soluzioni**

**A1.** 32

**A2.** $y(x) = 5e^{-2x} + 4xe^{-2x}$

**A3.** $\frac{2}{3}$

**A4.** $\pi$

**A5.** $\ln\left(\frac{7}{2}\right)$

**A6.** $\alpha > -5$

**A7.** Un'intersezione per $c = 1$, zero intersezioni per $c < 1$, due intersezioni per $c > 1$.

**A8.** $2\pi x^2 - 9x^3 - 4\pi x^6$

**A9.** $x = -1$ punto di massimo globale, $x = -\sqrt{2}$ punto di minimo locale, $x = \frac{1}{2}$ punto di minimo globale.

**A10.** $\beta < -\frac{1}{2}$

**B1.** D

**B2.** A

**B3.** B

**B4.** A

**B5.** B

**B6.** A

**B7.** A

**B8.** B

**B9.** A

**B10.** D