Analisi Matematica I - 27/02/18 - Tempo a disposizione: 3h
Matricola **Cognome e Nome**

A1. Stabilire se l'integrale $\displaystyle\int_0^2 \frac{(\ln x)\sin(x^3)}{x^2}\,dx$ converge o diverge.

A2. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-x^2)^{1/2}-1}{(1+x^2)\sin x^2}$.

A3.* Calcolare la retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \log_3\left(\dfrac{x+5}{4x^5+1}\right)$ nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

A4.* Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n^{-\beta})}{\ln(1+n^{-2})}$. Determinare tutti i valori del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ per cui la serie converge.

A5. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'(x) = 3x^2 y(x) + 2e^{x^3} \\ y(0) = 1. \end{cases}$

A6.* Calcolare il valore del limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos(\pi n)}{\cos\left(\frac{2}{n}\right) + n^3 \sin\left(\frac{1}{n^4}\right) + n}$.

A7. Dato $z = 2+i$, calcolare $\operatorname{Im}\left[\dfrac{z+3}{z+5} + 3\operatorname{Re}(z\bar{z})\right]$.

A8.* Sia $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{3x-1}{x^3}$. Determinare gli eventuali punti di massimo e/o minimo locali per la funzione f e per la funzione $|f|$.

A9. Si consideri $f : (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \ln(\cos(2x))$. Scrivere il Polinomio di Mc-Laurin di grado due della f.

A10. Calcolare $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+8\cos^2 x}\,dx$.

B1.* Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua e tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ esiste finito. Allora $\boxed{\text{A}}$ esiste un punto di massimo in $[0, +\infty)$. $\boxed{\text{B}}$ esiste un punto di minimo in $[0, +\infty)$. $\boxed{\text{C}}$ f non è superiormente limitata in $[0, +\infty)$. $\boxed{\text{D}}$ f è superiormente limitata in $[0, +\infty)$.

B2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e tale che $f(0) = 1$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{B}}$ esiste $\delta \in (0, 1)$ tale che $f(x) \geq 1$ per ogni $x \in (-\delta, \delta)$. $\boxed{\text{C}}$ esiste $\delta \in (0, 1)$ tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)$. $\boxed{\text{D}}$ esiste $\delta \in (0, 1)$ tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in (-\delta, \delta)$.

B3.* Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x \ln x$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f è concava. $\boxed{\text{B}}$ f è crescente. $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{x\to0} f(x) = -\infty$. $\boxed{\text{D}}$ f è convessa.

B4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin(x/2)$ se $x \geq 0$ e $f(x) = ax + b$ se $x < 0$. f è derivabile in 0 se e solo se $\boxed{\text{A}}$ $a = 1/2$ e $b = 1$. $\boxed{\text{B}}$ $a = 1/2$ e $b = 0$. $\boxed{\text{C}}$ $a = 0$ e $b = 1/2$. $\boxed{\text{D}}$ $a = 1$ e $b = 0$.

B5. Sia $f,\ g : [a, b] \to \mathbb{R}$, tali che $f + g$ e $f - g$ sono integrabili in $[a, b]$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $h = f\,g$ non è integrabile in $[a, b]$. $\boxed{\text{B}}$ f è integrabile in $[a, b]$, ma g non lo è. $\boxed{\text{C}}$ né f né g sono integrabili in $[a, b]$. $\boxed{\text{D}}$ f e g sono entrambe integrabili in $[a, b]$.

B6.* Sia a_n una successione tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; sia b_n una seconda successione tale che $b_n < \dfrac{1}{n^2}$ per ogni $n \geq 1$. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ $\boxed{\text{A}}$ non converge mai. $\boxed{\text{B}}$ converge a zero. $\boxed{\text{C}}$ converge sempre. $\boxed{\text{D}}$ converge se $b_n > 0$.

B7. Si consideri la successione $a_n = (-1)^n \arctan(n)$. Allora a_n è $\boxed{\text{A}}$ infinitesima. $\boxed{\text{B}}$ limitata. $\boxed{\text{C}}$ convergente. $\boxed{\text{D}}$ monotona.

B8.* Siano $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue e derivabili in $(0, 1)$ con $f(0) > g(0)$ e $f'(x) > g'(x)$ per ogni $x \in (0, 1)$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $f(1) \leq g(1)$. $\boxed{\text{B}}$ $f(1) < g(1)$. $\boxed{\text{C}}$ $f(1) = g(1)$. $\boxed{\text{D}}$ $f(1) > g(1)$.

B9. Siano $a < b < c < d$. Sia $f : (a, d) \to \mathbb{R}$ continua. Allora f è integrabile in $\boxed{\text{A}}$ (b, c). $\boxed{\text{B}}$ (b, d). $\boxed{\text{C}}$ (a, c). $\boxed{\text{D}}$ (a, b).

B10. Dato $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, si consideri $w = z\,\bar{z}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ esiste z tale che $w = -1$. $\boxed{\text{B}}$ $\sqrt{w} = \bar{z}$. $\boxed{\text{C}}$ $w > 0$. $\boxed{\text{D}}$ $\sqrt{w} = z$.

Soluzioni della prova del 27/02/18

Parte A.

A1. Per $x \to 0^+$ la funzione integranda è asintotica a $g(x) = x \ln x$. L'integrale converge poichè g continua e limitata in $[0, 2]$.

A2. Per $t \to 0$ si ha $(1 + t)^a \sim 1 + at$ e $\sin(t) \sim t$. Con la sostituzione $t = x^2$ si ottiene $\lim_{x\to 0} = -1/2$.

A3. Ricordando che la derivata di $\log_c x$ è $1/(x \ln c)$ si trova $y = x/(2 \ln 3) + \log_3 5$.

A4. Sia $a_n = \dfrac{\arctan(n^{-\beta})}{\ln(1 + n^{-}2)}$. Si ricordi che $\ln(1 + t) \sim t$ per $t \to 0$ e quindi $\ln(1 + n^{-2}) \sim n^{-2}$. Si ricordi inoltre che $\arctan(t) \sim t$ per $t \to 0$.
Per $\beta = 0$ si ha $a_n \sim \pi n^2/4 \to +\infty$ e quindi la serie diverge.
Per $\beta < 0$ si ha $a_n \sim \pi n^2/2 \to +\infty$ e quindi la serie diverge.
Per $\beta > 0$ si ha invece $a_n \sim n^{2-\beta}$. Quindi la serie converge per $\beta > 3$.

A5. $y(x) = e^{x^3}(2x + 1)$.

A6. Il numeratore è limitato. Il denominatore è asintotico ad n. Qundi $\lim_{n\to+\infty} = 0$.

A7. $\operatorname{Im}\left[\dfrac{z+3}{z+5} + 3\operatorname{Re}(z\bar{z})\right] = \operatorname{Im}\dfrac{5+i}{7+i} = 2/50.$

A8. Calcolando la derivata prima di f si ottiene un unico punto critico in $x_M = 1/2$, che risulta essere un massimo locale. Dopo aver tracciato il grafico di f e di quindi di $|f|$ si vede un punto di minimo (assoluto) nel punto di non derivabilità $x_m = 1/3$.

A9. Usanso la definizione di polinomio di Mac-Laurin si ottine $p(x) = -2x^2$. In alternativa, usare a catena le espansioni di $\cos(t)$ e $\ln(1 + t)$ per $t \to 0$.

A10. Usando la sostituzione $t = \cos(x)$ si ha

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1 + 8\cos^2 x}\, dx = -\int_1^0 \frac{1}{1 + 8t^2}\, dt = [\arctan(\sqrt{8}t)/\sqrt{8}]_0^1 = \arctan(\sqrt{8})/\sqrt{8}$$

Parte B.

B1. D

B2. D

B3. D

B4. B

B5. D

B6. D

B7. B

B8. D

B9. A

B10. C