Analisi Matematica I - 24/09/18 - Tempo a disposizione: 3h
Matricola **Cognome e Nome**

A1. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 4 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

A2. ⋆ Stabilire per quali valori del parametro $\alpha > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n^\alpha)} + \frac{(n+3)^\alpha}{(n+2)^7}$ converge.

A3. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in 0 di $f(x) = \sqrt{\cos(2x)}$.

A4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \arctan(1 + 2\sin x)$. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa 0.

A5. Calcolare il seguente integrale $\displaystyle\int_0^3 [e^x x^2 + 1]\, dx$.

A6. ⋆ Sia $\alpha > 0$ un parametro reale. Determinare per quali valori di α converge l'integrale $\displaystyle\int_3^{\infty} \arctan\left(\frac{3}{x^\alpha}\right) \sin\left(\frac{1}{1+x^{1/3}}\right)$.

A7. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^3 = 3$ (scrivere le soluzioni in forma esponenziale).

A8.⋆ Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n n^2 + [(n+1)!]\, 2^n}{[n!]\, 3^n - n^3}$.

A9.⋆ Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \ln\left(1 + \frac{2}{x^3}\right) - e^{\frac{2}{x^3}}}{\frac{3}{x^6}}$.

A10. Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^x \Big(\ln(1 + 4y^2) - \ln 2\Big) dy$. Si determinino gli intervalli di monotonia di F. F è decrescente in $\qquad$ F è crescente in

B1. Sia a_n una successione di numeri reali. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(a_n)}{n^2}$ $\boxed{\text{A}}$ converge a 0. $\boxed{\text{B}}$ converge per il criterio di Leibnitz. $\boxed{\text{C}}$ può convergere o non convergere a seconda della scelta di a_n. $\boxed{\text{D}}$ converge per il criterio di convergenza assoluta e del confronto.

B2.* Sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[-1, 1]$ e derivabile in $(-1, 1)$ tale che $f(-1) = f(0) = f(1)$. Allora $\boxed{\text{A}}$ esiste un unico $x_1 \in (-1, 1)$ tale che $f'(x_1) = 0$. $\boxed{\text{B}}$ esistono $x_1, x_2 \in (-1, 1)$, $x_1 \neq x_2$ tali che $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. $\boxed{\text{C}}$ $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (-1, 1)$. $\boxed{\text{D}}$ $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (-1, 1)$.

B3.* Si considerino le soluzioni dell'equazione differenziale $u'(x) = \lambda u(x)$ per $x \in [0, +\infty)$. $\boxed{\text{A}}$ Se $\lambda > 0$ e $u(0) > 0$ allora u è crescente. $\boxed{\text{B}}$ Se $\lambda < 0$ e $u(0) < 0$ allora u è convessa. $\boxed{\text{C}}$ Se $\lambda < 0$ e $u(0) > 0$ allora u è crescente. $\boxed{\text{D}}$ Se $\lambda > 0$ e $u(0) < 0$ allora u è convessa.

B4.* Sia $a_n > 0$ tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ finito. Allora $\boxed{\text{A}}$ $L \geq 0$. $\boxed{\text{B}}$ $\forall \epsilon > 0\ \exists N > 0$ tale che $\forall n > N$ risulta $a_n < L - \epsilon$. $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{n\to\infty} \sin(na_n)$ non esiste. $\boxed{\text{D}}$ $L > 0$.

B5. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, di classe C^2, convessa. Allora
$\boxed{\text{A}}$ $f' \leq 0$ in (a, b). $\boxed{\text{B}}$ f' è decrescente in (a, b). $\boxed{\text{C}}$ $f' \geq 0$ in (a, b). $\boxed{\text{D}}$ f' è crescente in (a, b).

B6. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e sia $I : [a, b] \to \mathbb{R}$ la funzione integrale $I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Se F è una primitiva di f in (a, b) allora $\boxed{\text{A}}$ esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $I = cF$ in (a, b). $\boxed{\text{B}}$ esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $I = F + c$ in (a, b). $\boxed{\text{C}}$ per ogni $c \in \mathbb{R}$ si ha $I = F + c$ in (a, b). $\boxed{\text{D}}$ $I = F$ in (a, b).

B7. Sia $H = \frac{\arctan\sqrt{3}}{\pi} + 2\log_8 2 + \frac{2}{3}\sin\frac{\pi}{6}$. Allora
$\boxed{\text{A}}$ $H = \frac{7}{6}$. $\boxed{\text{B}}$ $H = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$. $\boxed{\text{C}}$ $H = \frac{4}{3}$. $\boxed{\text{D}}$ $H = 1$.

B8.* Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ limitata. Allora $\boxed{\text{A}}$ esiste $c < 0$ tale che $f(x) \leq c$ per ogni $x \in (a, b)$. $\boxed{\text{B}}$ esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in (a, b)$. $\boxed{\text{C}}$ esiste $c > 0$ tale che $f(x) \leq c$ per ogni $x \in (a, b)$. $\boxed{\text{D}}$ esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in (a, b)$.

B9. Sia $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to1} f(x) = -\infty$. Allora $\boxed{\text{A}}$ esiste un $x_0 \in (-1, 1)$ tale che $f(x_0) = 0$. $\boxed{\text{B}}$ $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in (-1, 1)$. $\boxed{\text{C}}$ f è decrescente in $(-1, 1)$. $\boxed{\text{D}}$ esiste un $x_0 \in (-1, 1)$ tale che $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni $x \in (-1, 1)$.

B10. Siano $f(x) = x^2 + \ln(x)$ e $g(x) = e^x$. Allora $g \circ f(x) =$ $\boxed{\text{A}}$ xe^{x^2}. $\boxed{\text{B}}$ $x\ln(x)$. $\boxed{\text{C}}$ xe^x. $\boxed{\text{D}}$ $x + e^{2x}$.

Soluzioni della prova del 24/09/18

Parte A

A1. Le soluzioni sono della forma $y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x)$. Dal polinomio caratteristico si otteniene la soluzione generale dell'omogenea, $y_0(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$. Una soluzione particolare si trovare facilmente $\bar{y}(x) = 1$. Sostituendo i dati iniziali si ottiene $y(x) = -e^{-2x} - 2xe^{-2x} + 1$.

A2. La prima serie converge per ogni $\alpha > 0$ per il criterio di Leibniz. Per la seconda si ha $\dfrac{(n+3)^\alpha}{(n+2)^7} \approx n^{\alpha-7}$. Dunque la serie converge per $\alpha < 6$.

A3. Dalla formula generale, oppure usando a catena le espansioni di $\cos(t)$ e $(1+x)^{1/2}$, si ottiene $p(x) = 1 - x^2$.

A4. $y = x + \frac{\pi}{4}$

A5. Integrando due volte per parti il termine $e^x x^2$ si ottiene $5e^3 + 1$.

A6. Per $x \to +\infty$ la funzione integranda è asinototica a $\dfrac{3}{x^\alpha}\dfrac{1}{x^{1/3}}$. quindi l'integrale converge per $\alpha > 2/3$.

A7. Le soluzioni sono $z_k = \rho e^{i\theta_k}$ con $\rho = \sqrt[3]{3}$ e $\theta_k = \dfrac{2k\pi}{3}$ per $k = 0, 1, 2$.

A8. La successione àsintotica a $\dfrac{[(n+1)!]\,2^n}{[n!]\,3^n} = (n+1)(\frac{2}{3})^2$ quindi è infinetesima.

A9. Usando le espansioni al secondo ordine (o due volte l'Hopital) si ottiene $-\dfrac{4}{3}$.

A10. Dal Teorema fondamentale si ha $F'(x) = \ln(1 + 4x^2) - \ln 2$. Quindi $F'(x) \geq 0$ in $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ e in $[\frac{1}{2}, +\infty)$ mentre $F'(x) \leq 0$ in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Parte B

B1. $\boxed{\text{D}}$

B2. $\boxed{\text{B}}$ Dal Teorema di Lagrange

B3. $\boxed{\text{A}}$ $u(x) = u(0)e^{\lambda x}$

B4. $\boxed{\text{A}}$ Dal Teorema di permanenza del segno

B5. $\boxed{\text{D}}$ Perchè $f''(x) \geq 0$.

B6. $\boxed{\text{B}}$ Dal Teorema Fondamentale del Calcolo

B7. $\boxed{\text{C}}$

B8. $\boxed{\text{C}}$ Per definizione di funzione limitata

B9. $\boxed{\text{A}}$ Per il Teorema degli zeri.

B10. $\boxed{\text{A}}$