Analisi Matematica – Test 4

Problema 1

Calcolare

- $(3 + i\,2)(4 + i) - 5$
- $(\sqrt{3} + i)^5$ (esprimere in forma algebrica)

[Per il secondo punto: ricordare che $\tan(\pi/6) = \sqrt{3}/3$]

Problema 2

Qual è il dominio della funzione $f(x, y) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{xy}}$?

Problema 3

Esprimere

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x + 2y, x^2 y^3)$$

in funzione delle derivate parziali prime della funzione f, supponendo che esse siano continue.

Problema 4

Trovare tutti i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - xy + 5$$

e classificare ciascuno di essi come massimo locale, minimo locale o punto sella.

Soluzioni

Problema 1

- $5 + i\,11$
- Modulo $R = \sqrt{3+1} = 2$; argomento $\theta = \tan^{-1}(1/\sqrt{3}) = \tan^{-1}(\sqrt{3}/3) = \pi/6$
  quindi $(\sqrt{3}+i) = 2\,(\cos(\pi/6) + i\,\sin(\pi/6))$
  $(\sqrt{3}+i)^5 = 2^5\,(\cos(5\,\pi/6) + i\,\sin(5\,\pi/6)) = 32\,(-\sqrt{3}/2 + i/2) = -16\,\sqrt{3} + i\,16$

Problema 2

– Il numeratore è definito per $x > 0$
– Il denominatore è definito e non nullo per $xy > 0$, cioè $x > 0$ e $y > 0$, oppure $x < 0$ e $y < 0$
Mettendo in sistema le due condizioni precedenti si ottiene:

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 :\, x > 0 \text{ e } y > 0\}.$$

Problema 3

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} f(x+2y, x^2y^3) \quad &= \nabla f(x+y, x^2y^2) \cdot (2, 3x^2y^2) \\
&= \Big(\frac{\partial}{\partial x} f(x+2y, x^2y^3), \frac{\partial}{\partial y} f(x+2y, x^2y^3)\Big) \cdot (2, 3x^2y^2) \\
&= 2\,\frac{\partial}{\partial x} f(x+2y, x^2y^3) + 3x^2y^2\,\frac{\partial}{\partial y} f(x+2y, x^2y^3)
\end{aligned}$$

Problema 4

Derivate parziali prime: $\quad \dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 3x^2 - y \qquad \dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 3y^2 - x$

Derivate parziali seconde: $\quad \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = 6x \qquad \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = -1 \qquad \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = 6y$

Punti critici: imponenedo l'annullamento del gradiente,

$$\begin{cases} 3x^2 - y = 0 \\ \\ 3y^2 - x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 3x^2 \\ \\ 27x^4 - x = x\,(27x^3 - 1) = 0 \end{cases}$$

quindi i punti critici sono $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1/3, 1/3)$.

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad Hf(1/3,1/3) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det(Hf(0,0)) = -1 < 0 \qquad \det(Hf(1/3,1/3)) = 4 - 1 = 3 > 0,\ 2 > 0$
$P_1 = (0,0)$ punto sella $\qquad P_2 = (1/3,1/3)$ minimo locale