
Polinomi di Taylor

Formula del polinomio di Taylor di grado n per $f(x)$ intorno ad x_0 :

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k.$$

Risolvere i seguenti esercizi.

I. Sia $f(x) = x \log_e(x)$. Calcolare i polinomi di Taylor $p_1(x)$ e $p_2(x)$ intorno ad $x_0 = 1$. Calcolare $p_1(2)$ e $p_2(2)$.

II. Sia $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$. Calcolare i polinomi di Taylor $p_1(x)$ e $p_2(x)$ intorno ad $x_0 = -1$. Calcolare $p_1(-2)$ e $p_2(-2)$.

III. Sia $f(x) = e^{2x+1}$. Calcolare i polinomi di Taylor $p_1(x)$ (nella forma $mx + q$) e $p_2(x)$ (nella forma $ax^2 + bx + c$) intorno ad $x_0 = -1$. Calcolare $p_1(1)$ e $p_2(1)$.

IV. Sia $f(x) = \log_e(3x^2 + 1)$.

a. Calcolare i polinomi di Taylor $p_1(x)$ e $p_2(x)$ intorno ad $x_0 = \sqrt{3}/3$.

b. Calcolare i polinomi di Taylor $q_1(x)$ e $q_2(x)$ intorno ad $x_0 = 0$. Tracciare i grafici di $f(x)$, $q_1(x)$ e $q_2(x)$ nello stesso sistema di riferimento.

V. Sia $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

a. Calcolare i polinomi di Taylor $p_1(x)$ e $p_2(x)$ intorno ad $x_0 = 1$. Calcolare $p_1(2)$ e $p_2(2)$. Calcolare gli errori $|f(2) - p_1(2)|$ e $|f(2) - p_2(2)|$.

b. Calcolare i polinomi di Taylor $q_1(x)$ e $q_2(x)$ intorno ad $x_0 = 0$. Calcolare l'errore $|f(x) - p_2(x)|$.