Esercizi su ODE's

1. Studiare zero-stabilità, consistenza, convergenza e ordine del metodo
$$y_{n+2} - \frac{1}{2}(y_{n+1} + y_n) = \frac{h}{4}(4f_{n+2} - f_{n+1} + 3f_n).$$

2. Dimostrare che il metodo multistep lineare
$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3}(f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n)$$
è zero-stabile e determinarne l'ordine.

3. Costruire un metodo lineare a 2 passi implicito di ordine massimo, contenente un parametro libero ($\alpha_2 = 1$, $\alpha_0 = a$, a parametro). Determinare l'ordine e la costante d'errore del metodo.

4. Determinare i valori del parametro reale b per cui il metodo multistep lineare
$$y_{n+3} + (2b-3)(y_{n+2} - y_{n+1}) - y_n = h\,b\,(f_{n+2} + f_{n+1})$$
è zero-stabile. Dimostrare che in questi casi l'ordine del metodo non può essere maggiore di 2.

5. Individuare i valori del parametro a per cui il metodo
$$y_{n+1} - (2-a)\,y_n - (a-1)\,y_{n-1} = h\,[(1+a^2-a)\,f_n + (a-1)\,f_{n-1}]$$
è consistente. In corrispondenza di tali valori, studiare zero-stabilità e ordine, individuando l'unico caso in cui si ha convergenza. Per quali valori del passo h il metodo convergente applicato al problema $y'(x) = -5y(x)$, $x \geq 0$, $y(0) = 1$, è assolutamente stabile ?

6. Determinare l'ordine del metod multistep lineare
$$y_{n+2} - (1+a)\,y_{n+1} + y_n = \frac{h}{4}[(3-a)\,f_{n+2} + (1-3a)\,f_n]$$
e studiarne la zero-stabilità. Individuare l'intervallo di assoluta stabilità del metodo corrispondente ad $a = 1/3$.

7. Se $\sigma(z) = z^2$ è il secondo polinomio caratteristico di un metodo multistep lineare, trovare il polinomio quadratico $\rho(z)$ tale che l'ordine del metodo multistep lineare associato sia 2. Tale metodo è convergente? Qual è il suo intervallo di assoluta stabilità?

8. Si consideri lo schema predictor-corrector (PEC) costruito a partire dai seguenti metodi:
$$y_{n+1} - \alpha\,y_n - y_{n-1} = h\,\beta\,f_n,$$
$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n).$$
Determinare per quali valori di α e β il metodo è consistente. Dire inoltre qual è l'ordine del metodo che si ottiene per $\alpha = 0$ e $\beta = 2$.