

Elementi Finiti per la Meccanica del Continuo e delle Strutture

1. Modello della membrana pretesa

- Problema modello monodimensionale: $-u'' = f$ in $(a, b) \subset \mathbb{R}$, con $u(a) = u(b) = 0$.
- Formulazione variazionale e approssimazione di Galerkin.
- Funzioni di base e forma matriciale del metodo di Galerkin.
- Elementi finiti lineari 1D: calcolo della matrice di stiffness e del load vector.
- Assemblaggio della matrice di stiffness e del load vector a partire dalla matrice di stiffness e dal load vector di elemento.
- Trattamento delle condizioni al bordo: Dirichlet omogeneo e non omogeneo, Dirichlet-Neumann.
- Formulazione astratta del metodo di Galerkin.
- Proprietà della matrice di stiffness.
- Problema di diffusione-reazione 1D.
- Definizione formale di *elemento finito*.
- Complementi al caso 1D: la soluzione numerica del problema modello ottenuta utilizzando elementi finiti lineari è esatta nei nodi.
- Elementi finiti bidimensionali: reticolazioni e spazi di polinomi a tratti in due variabili sui triangoli.
- Problema modello bidimensionale: $-\Delta u = f$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, con $u = 0$ su $\partial\Omega$.
- Discretizzazione mediante elementi finiti lineari a tratti sui triangoli: funzioni di base, matrice di stiffness e load vector.
- Assemblaggio della matrice di stiffness e del load vector a partire dalla matrice di stiffness e dal load vector di elemento.
- Calcolo delle funzioni di base lineari e dei loro gradienti; calcolo della matrice di stiffness e del load vector di elemento.
- Cenni sull'analisi teorica del metodo di Galerkin: esistenza e unicità della soluzione, convergenza (ortogonalità di Galerkin, lemma di Céa, proprietà di approssimazione delle funzioni polinomiali a tratti).
- Elementi finiti sui rettangoli.
- Metodi misti per la membrana pretesa: formulazione (σ, u) .
- Approssimazione di Galerkin astratta.
- Approssimazione mediante elementi di Raviart-Thomas per σ e costanti a tratti per u .
- Proprietà dei problemi di punto sella nel caso discreto: condizioni di risolubilità e cenni al problema della stabilità.
- Cenni al metodo di ibridizzazione.

2. Elasticità lineare quasi-incomprimibile e incomprimibile

- Formulazione nell'incognita spostamento \mathbf{u} per l'elasticità lineare comprimibile nell'ipotesi di gradienti di spostamento piccoli.
- Caso quasi-incomprimibile: formulazione in \mathbf{u} e formulazione mista (\mathbf{u}, p) .
- Formulazione mista (\mathbf{u}, p) nel limite incomprimibile; discussione sul vincolo di incomprimibilità nell'ipotesi di gradienti di spostamento piccoli.
- Metodo di Galerkin per la formulazione (\mathbf{u}, p) e cenni all'eliminazione della variabile p nel caso quasi-incomprimibile per discretizzazioni con p_h discontinue.
- Discussione sulla risolubilità del metodo.
- Elementi finiti lineari a tratti per \mathbf{u} e costanti a tratti per p : fenomeno del *mesh locking*.
- Approccio euristico per determinare la bontà di un metodo: rapporto tra numero gradi di libertà degli spostamenti e numero delle equazioni vincolari indipendenti.
- Elementi finiti con approssimazioni di p_h discontinue per la formulazione (\mathbf{u}, p) : $Q_2 - P_1$, $P_2 - P_0$, $P_2^b - P_1$ (Crouzeix-Raviart); checkerboard per $Q_1 - P_0$.
- Elementi finiti con approssimazioni di p_h continue per la formulazione (\mathbf{u}, p) : $Q_2 - Q_1$, $P_2 - P_1$, Serendipity- Q_1 , $P_1^b - P_1$ ("mini").
- Cenni ai metodi *reduced and selective integration* per la formulazione in \mathbf{u} .
- Formule di quadratura sui triangoli e sui rettangoli; formule di Gauss-Legendre.

3. Modello di trave di Timoshenko

- Modello di trave di Timoshenko e confronto con il modello di Eulero-Bernoulli.
- Formulazione variazionale mista e in variabili primali.
- Discussione sul fenomeno del *locking* numerico.
- Un metodo agli elementi finiti: elementi finiti lineari e integrazione ridotta del termine di taglio.
- Generalizzazione a gradi di approssimazione più elevati.

4. Modello di piastra di Reissner-Mindlin

- Modello di piastra di Reissner-Mindlin e confronto con il modello di Kirchhoff-Love.
- Formulazione variazionale mista e in variabili primali.
- *Locking* numerico per spessore infinitesimo.
- Formulazione mista con operatore di proiezione sul termine di taglio.
- Elementi finiti: Falk-Tu, Arnold-Falk, MITC4 (Bathe-Dvorkin).

TESTI CONSIGLIATI

A. Quarteroni, *Modellistica Numerica per Problemi Differenziali*, 2a edizione, Springer-Verlag Italia, 2003.

T.J.R. Hughes, *The finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Dover Publication, Inc., Mineola, New York, 2000.

D. Braess, *Finite Elements: Theory, Fast Solvers and Applications in Solid Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.