Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Fisica Matematica (Ingegneria Industriale)
Appello dell'11 febbraio 2016

1. *Determinare, per il seguente sistema di vettori applicati,*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (1, -2, 1), \\ \boldsymbol{v}_2 = 3\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (2, -3, 1), \\ \boldsymbol{v}_3 = -2\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y - 3\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (3, 2, -1) \end{cases}$$

*il risultante (**1** punto), il momento risultante (**3** punti), il trinomio invariante (**1** punto) e l'equazione dell'asse centrale (**2** punti).*

Il riusltante è $\boldsymbol{R} = 3\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z$ ed il momento risultante rispetto al polo O è $\boldsymbol{M}_O = -14\boldsymbol{e}_x + 11\boldsymbol{e}_y + 20\boldsymbol{e}_z$, per cui il trinomio invariante è dato da $\mathcal{I} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{M}_O = -29$. Per trovare l'equazione dell'asse centrale osserviamo che $|\boldsymbol{R}|^2 = 19$ e che $\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{M}_O = 71\boldsymbol{e}_x - 46\boldsymbol{e}_y + 75\boldsymbol{e}_z$. Pertanto i punti P dell'asse centrale hanno vettore posizione $P - O = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ dato da

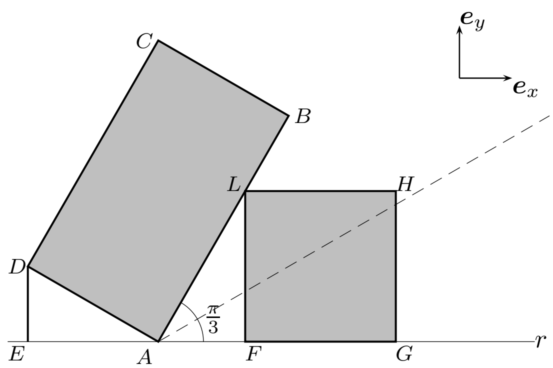
$$\begin{cases} x = -\frac{14}{19} + 3\lambda \\ \\ y = \frac{11}{19} + 3\lambda \\ \\ z = \frac{20}{19} - \lambda \end{cases}$$

dove λ è un numero reale.

2. *Un corpo rigido è formato da un rettangolo omogeneo $ABCD$ di massa $2m$ e lati $AB = 2\ell\sqrt{3}$, $AD = 2\ell$, con AB inclinato di $\frac{\pi}{3}$ sull'orizzontale; da un quadrato $FGHL$ di massa $3m$ e lato di lunghezza 2ℓ, con FG sulla stessa retta orizzontale r su cui è appoggiato A ed L sul lato AB del rettangolo; da un'asta verticale DE di massa $3m$ e lunghezza ℓ, con E appoggiato su r. Determinare il momento di inerzia di ciascuno dei tre corpi descritti rispetto alla bisettrice dell'angolo BAG (**11** punti).*

Consideriamo il rettangolo $ABCD$ ed indichiamo con $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$ i versori associati ai vettori $B - A$ e $D - A$, rispettivamente. Sulla base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ la matrice centrale di inerzia del rettangolo è

$$\mathbb{I}_{G_R} = \frac{m\ell^2}{6} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$



per cui il momento centrale di inerzia nella direzione $\boldsymbol{n} = \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2$ associata alla bisettrice dell'angolo BAG è

$$\boldsymbol{n} \cdot \mathbb{I}_{G_R}\boldsymbol{n} = m\ell^2.$$

Calcoliamo ora la distanza del centro di massa G_R del rettangolo dalla retta passante per A e diretta come $\boldsymbol{n}$ utilizzando, ad esempio, la formula

$$d = |(G_R - A) \wedge \boldsymbol{n}| \,.$$

Osserviamo che

$$G_R - A = \ell\sqrt{3}\boldsymbol{e}_1 + \ell\boldsymbol{e}_2$$

per cui, essendo $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$ versori mutuamente ortogonali,

$$d = \ell\sqrt{3}.$$

Applicando il teorema di Huygens-Steiner concludiamo che il contributo del rettangolo al momento di inerzia richiesto è

$$m\ell^2 + 2md^2 = 7m\ell^2.$$

Per il quadrato e l'asta utilizziamo lo stesso procedimento sviluppando però $\boldsymbol{n}$ sulla base $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_x + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_y. \tag{1}$$

Partiamo dal quadrato $FGHL$, il cui centro di massa G_Q ha vettore posizione

$$G_Q - A = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right)\ell\boldsymbol{e}_x + \ell\boldsymbol{e}_y.$$

Poiché tutte le direzioni del piano sono autovettori per il tensore centrale di inerzia di un quadrato, corrisponenti all'autovalore $\frac{3m}{12}4\ell^2 = m\ell^2$, abbiamo dal teorema di Huygens-Steiner il seguente contributo del quadrato al momento richiesto:

$$m\ell^2 + 3mh^2$$

dove

$$h = |(G_Q - A) \wedge \boldsymbol{n}|$$

è la distanza di G_Q dalla retta per A, diretta lungo $\boldsymbol{n}$. Usando (1) abbiamo il momento cercato nella forma

$$m\ell^2 + 3m\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2 \ell^2 = \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) m\ell^2.$$

Per l'asta DE, il contributo del momento centrale di inerzia è

$$\frac{3m}{12}\ell^2 \sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{16}m\ell^2$$

visto che $\boldsymbol{n}$ forma un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con l'asta. Il centro di massa G_A dell'asta ha vettore posizione

$$G_A - A = -\sqrt{3}\ell\boldsymbol{e}_x + \frac{\ell}{2}\boldsymbol{e}_y$$

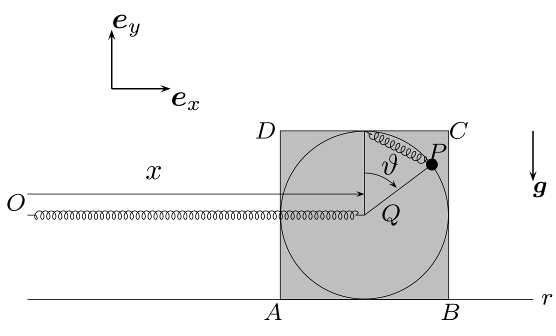
per cui la sua distanza λ dalla retta passante per A, diretta come $\boldsymbol{n}$, è

$$\lambda = |(G_A - A) \wedge \boldsymbol{n}| = \frac{3}{4}\sqrt{3}\ell.$$

Il teorema di Huygens-Steiner permette di ottenere questa espressione del momento di inerzia dell'asta

$$\frac{3}{16}m\ell^2 + 3m\frac{27}{16}\ell^2 = \frac{21}{4}m\ell^2$$

3._In un piano verticale un quadrato omogeneo $ABCD$ di massa $2m$ e lati di lunghezza 2ℓ trasla senza attrito lungo una guida orizzontale r. Nel quadrato è praticata una scanalatura circolare, di centro Q, tangente internamente al quadrato e di raggio ℓ, in cui scorre senza attrito un punto materiale P di massa m. Il punto Q è attratto da una molla ideale di costante elastica $\frac{mg}{\ell}$, verso un punto O fisso, alla stessa quota di Q, mentre P è attratto verso il punto medio di CD da un'altra molla ideale di costante elastica $\gamma\frac{mg}{\ell}$. Introdotte le coordinate_



x e ϑ indicate in figura, determinare le configurazioni di equilibrio ordinarie del *sistema, studiandone la stabilità al variare di $\gamma > 0$ (**6** punti). Posto $\gamma = 2$, trovare l'energia cinetica del sistema (**3** punti) e trovare le pulsazioni delle piccole oscillazioni del sistema in un intorno della configurazione di equilibrio stabile (**3** punti).*

L'energia potenziale ha tre contributi: quello della forza elastica che attrae Q verso il punto fisso O, pari a $\frac{mg}{2\ell}x^2$; il contributo della forza peso che si riduce, presa come quota di riferimento quella passante per Q, a $mg\ell\cos\vartheta$; il contributo della forza elastica agente su P che si ricava dal teorema di Carnot: $\frac{\gamma mg}{2\ell}(2\ell^2 - 2\ell^2\cos\vartheta) = \gamma mg\ell(1-\cos\vartheta)$. Pertanto, a meno di costanti additive, l'energia potenziale è

$$V = \frac{mg}{2\ell}x^2 + mg\ell(1-\gamma)\cos\vartheta.$$

Per studiare le configurazioni di equilibrio, risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{mg}{\ell}x = 0 \\ \\ \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = mg\ell(\gamma-1)\sin\vartheta = 0\,. \end{cases}$$

Esistono due configurazioni di equilibrio ordinarie, caratterizzate dai seguenti valori (x,ϑ): $E_1 \equiv (0,0)$ ed $E_2 \equiv (0,\pi)$. Per studiarne la stabilità consideriamo le rispettive matrici hessiane

$$B(E_1) = \begin{pmatrix} \frac{mg}{\ell} & 0 \\ 0 & mg\ell(\gamma-1) \end{pmatrix} \qquad B(E_2) = \begin{pmatrix} \frac{mg}{\ell} & 0 \\ 0 & mg\ell(1-\gamma) \end{pmatrix}:$$

la prima configurazione è stabile per $\gamma > 1$ ed instabile per $0 < \gamma < 1$ mentre la seconda configurazione è stabile per $0 < \gamma < 1$ e stabile per $\gamma > 1$. Se $\gamma = 1$ la forma hessiana ha un autovalore nullo e dobbiamo sospendere il giudizio. Quando $\gamma = 2$ la configurazione di equilibrio stabile è E_1 e la sua matrice hessiana è

$$B(E_1) = \begin{pmatrix} \frac{mg}{\ell} & 0 \\ 0 & mg\ell \end{pmatrix}.$$

Per il calcolo dell'energia cinetica osserviamo che la lamina ha velocità angolare nulla e dunque il suo contributo all'energia cinetica è $m\dot{x}^2$. Ad esso va aggiunto il contributo $\frac{m}{2}\boldsymbol{v}_P^2$ relativo al punto P. Siccome

$$P - O = x\boldsymbol{e}_x + \ell\boldsymbol{e}_1\,,$$

dove $\boldsymbol{e}_1$ è il versore diretto come $P-Q$, abbiamo

$$\boldsymbol{v}_P = \dot{x}\boldsymbol{e}_x - \ell\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z \wedge \boldsymbol{e}_1$$

dove abbiamo applicato la formula di Poisson osservando che, per la scelta delle coordinate, la velocità angolare della base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, con $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_z \wedge \boldsymbol{e}_1$, è $\boldsymbol{\omega} = -\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$. Pertanto

$$\boldsymbol{v}_P = \dot{x}\boldsymbol{e}_x - \ell\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_2$$

e

$$\boldsymbol{v}_P^2 = \dot{x}^2 + \ell^2\dot{\vartheta}^2 - 2\ell\dot{x}\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_2 = \dot{x}^2 + \ell^2\dot{\vartheta}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta$$

dal momento che l'angolo tra $\boldsymbol{e}_x$ ed $\boldsymbol{e}_2$ è $\pi - \vartheta$. Dunque

$$T = \frac{3}{2}m\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\ell^2\dot{\vartheta}^2 + m\ell\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta.$$

La forma quadratica corrispondente, nella configurazione di equilibrio E_1, è

$$A(E_1) = \begin{pmatrix} 3m & m\ell \\ m\ell & m\ell^2 \end{pmatrix}.$$

Le pulsazioni delle piccole oscillazioni sono le radici quadrate $\omega_\pm$ delle soluzioni dell'equazione $\det(\lambda A - B) = 0$ e, con calcoli diretti, si dimostrano essere

$$\omega_\pm = \left(\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$