Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Correzione prova scritta
Esame di Fisica Matematica
18 gennaio 2012

1. *Determinare, per il seguente sistema di vettori applicati,*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_1 - O \equiv (1,-2,1), \\ \boldsymbol{v}_2 = 3\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_2 - O \equiv (2,1,1), \\ \boldsymbol{v}_3 = -\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y - 3\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_3 - O \equiv (1,3,-2) \end{cases}$$

1. *il risultante ed il momento risultante;*
2. *il trinomio invariante;*
3. *l'equazione dell'asse centrale;*
4. *determinare un sistema di vettori applicati, equivalente a quello proposto, formato da due vettori, di cui uno applicato in $Q \equiv (1,0,-1)$.*

Il risultante è $\boldsymbol{R} = 3\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_z$ ed il momento risultante rispetto ad O è $\boldsymbol{M}_O = -6\boldsymbol{e}_x + 6\boldsymbol{e}_y + 7\boldsymbol{e}_z$ per cui il trinomio invariante è $\mathcal{I} = -8$. Siccome $|\boldsymbol{R}|^2 = 29$ e $\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{M}_O = 40\boldsymbol{e}_x - 9\boldsymbol{e}_y + 42\boldsymbol{e}_z$ i punti $Q - O = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ dell'asse centrale soddisfano le equazioni

$$\begin{cases} x &= \frac{40}{29} + 3\lambda \\ y &= -\frac{9}{29} + 4\lambda \\ z &= \frac{42}{29} - 2\lambda. \end{cases}$$

Per rispondere all'ultimo quesito osserviamo che, dal teorema del trasporto, si ottiene $\boldsymbol{M}_Q = -10\boldsymbol{e}_x + 7\boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z$. Oltre al risultante, applichiamo in Q un vettore $-\boldsymbol{v}$ per ora incognito e in un punto S incognito applichiamo il vettore $\boldsymbol{v}$. Occorre che

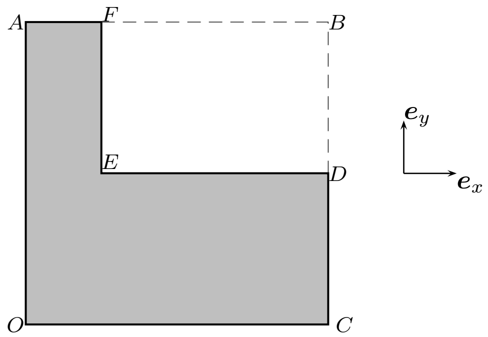
$$(S - Q) \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{M}_Q$$

e dunque bisogna scegliere $\boldsymbol{v}$ in modo che $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{M}_Q = 0$: ad esempio $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{e}_y - 7\boldsymbol{e}_z$. Allora sarà

$$S - Q = \frac{1}{58}(58\boldsymbol{e}_x + 70\boldsymbol{e}_y + 30\boldsymbol{e}_z)$$

per cui $S - O = 2\boldsymbol{e}_x + \frac{35}{29}\boldsymbol{e}_y - \frac{14}{29}\boldsymbol{e}_z$.

2. *Da una lamina quadrata $OABC$ omogenea di massa $3m$ e lato di lunghezza 4ℓ viene asportato un rettangolo $FBDE$ di lati $EF = 2\ell$ ed $FB = 3\ell$, nella posizione indicata in figura. Ad un certo istante $t = 0$ il corpo occupa la configurazione indicata in figura e la velocità di A è $\boldsymbol{v}_A = v_0(\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y)$ mentre quella di D è $\boldsymbol{v}_D = v_0(2\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y)$, dove v_0 è una velocità caratteristica. Determinare:*



1. la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(0)$ del corpo all'istante $t = 0$;
2. la velocità $\boldsymbol{v}_F(0)$ del punto F all'istante $t = 0$;
3. la posizione del centro di istantanea rotazione all'istante $t = 0$ rispetto al punto O, per via aanalitica;
4. le coordinate del centro di massa della lamina $AFEDCO$ rispetto al punto O;
5. il momento di inerzia di $AFEDCO$ rispetto all'asse passante per O e diretto lungo $\boldsymbol{e}_x$;
6. il momento centrale di inerzia di $AFEDCO$ nella direzione $\boldsymbol{e}_y$.

Posto $\boldsymbol{\omega}(0) = \omega \boldsymbol{e}_z$ si ha

$$\boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{v}_D = -v_0(\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y) = \omega \ell \boldsymbol{e}_z \wedge (-4\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y)$$

da cui si ottiene $\omega = \frac{v_0}{2\ell}$ e quindi

$$\boldsymbol{v}_F(0) = \boldsymbol{v}_A(0) + \frac{v_0}{2\ell}\boldsymbol{e}_z \wedge (\ell \boldsymbol{e}_x) = v_0(\boldsymbol{e}_x + \frac{5}{2}\boldsymbol{e}_y).$$

Infine, scritto il vettore posizione del centro C^* di istantanea rotazione rispetto ad A come

$$C^* - A = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y,$$

abbiamo

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}_{C^*} = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge (C^* - A)$$

da cui segue

$$x = -4\ell \qquad y = 2\ell.$$

Per trovare $C^* - O$ è sufficiente osservare che

$$C^* - O = C^* - A + (A - O) = -4\ell \boldsymbol{e}_x + 6\ell \boldsymbol{e}_y.$$

Le coordinate del centro di massa G della lamina $AFEDCO$ rispetto ad O si ottengono osservando che il centro di massa di $OABC$ ha coordinate $(2\ell, 2\ell)$ mentre quello di $EFBD$ ha coordinate $(\frac{5}{2}\ell, 3\ell)$, sempre rispetto ad O. La massa di $EFBD$ è $\frac{3m}{16\ell^2}6\ell^2 = \frac{9}{8}m$ per cui, dalla proprietà distributiva del centro di massa otteniamo

$$x_G = \frac{17}{10}\ell$$

e

$$y_G = \frac{7}{5}\ell.$$

Servendosi del teorema di Huygens-Steiner abbiamo

$$I_{O,\boldsymbol{e}_x}^{OBDC} = 4m\ell^2 + 12m\ell^2 = 16m\ell^2,$$

$$I_{O,\boldsymbol{e}_x}^{EFBD} = 3\frac{m\ell^2}{8} + \frac{81}{8}m\ell^2 = \frac{21}{2}m\ell^2$$

e quindi, per differenza,

$$I_{O,\boldsymbol{e}_x}(AFEDCO) = \frac{11}{2}m\ell^2.$$

Quanto al momento centrale di inerzia per $AFECDO$ lungo la direzione $\boldsymbol{e}_y$ possiamo servirci del teorema di composizione osservando che la massa ridotta del sistema ottenuto sottraendo $EFBD$ da $OABC$ è $\mu = -\frac{9}{5}m$ per cui

$$I_{G,\boldsymbol{e}_y}(AFEDCO) = 4m\ell^2 - \left(\frac{27}{32} - \frac{9}{20}\right)m\ell^2 = \frac{433}{160}m\ell^2.$$

3._In un piano verticale, un quadrato omogeneo di massa $2m$ e lato di lunghezza $\sqrt{2}\ell$ è libero di ruotare attorno al suo vertice O dove è incernierato ad un punto fisso. Lungo la diagonale OA del quadrato è praticata una scanalatura entro cui può muoversi senza attrito un punto materiale P di massa m, attratto da una molla ideale di costante elastica $3mg/\ell$ verso il punto H sull'orizzontale passante per O e tale che PH è sempre verticale. Introdotte le coordinate ϑ ed s indicate in figura, determinare l'energia cinetica e quella potenziale del sistema. Studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio e qualificare i modi normali di oscillazione in un intorno della posizione di equilibrio stabile._

Se si osserva che la velocità angolare della lamina è $\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$, l'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{1}{2}I_{O,\boldsymbol{e}_z}\dot{\vartheta}^2 + \frac{m}{2}v_P^2,$$

dove $I_{O,\boldsymbol{e}_z}$ è il momento di inerzia del quadrato rispetto all'asse $\boldsymbol{e}_z$, passante per O. Grazie al teorema di Huygens-Steiner abbiamo

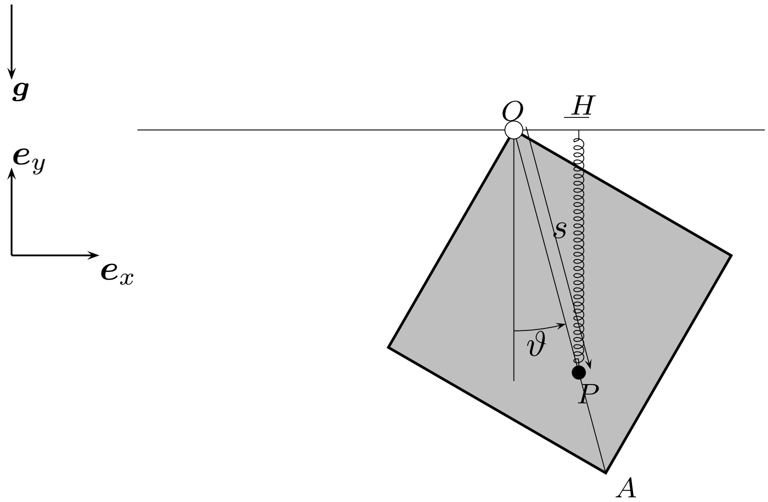
$$I_{O,\boldsymbol{e}_z} = \frac{1}{3}m\ell^2 + 2m\ell^2 = \frac{7}{3}m\ell^2.$$

Per calcolare la velocità $\boldsymbol{v}_P$ di P, introduciamo il versore $\boldsymbol{e}_1 := \frac{A-O}{|A-O|}$ ed il versore $\boldsymbol{e}_2$ tale che $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_z$: la base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_z\}$ è solidale alla lamina e dunque è animata dalla stessa velocità angolare $\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$. Derivando la relazione

$$P - O = s\boldsymbol{e}_r$$

rispetto al tempo e servendosi delle formule di Poisson abbiamo

$$\boldsymbol{v}_P = \dot{s}\boldsymbol{e}_r + s\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_\vartheta$$



per cui, in definitiva,

$$T = \frac{7}{6}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{m}{2}[\dot{s}^2 + s^2\dot{\vartheta}^2].$$

L'energia potenziale è formata da tre contributi: quello relativo alla forza peso agente sulla lamina, quello relativo alla forza peso agente sul punto materiale e quello derivante dalla forza elastica, per cui

$$V = -2mg\ell\cos\vartheta - mgs\cos\vartheta + \frac{3mg}{2\ell}s^2\cos^2\vartheta$$

e le posizioni di equilibrio sono le soluzioni di

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial s} = mg\cos\vartheta(-1 + \frac{3}{\ell}s\cos\vartheta) = 0 \\ \\ \frac{\partial V}{\partial\vartheta} = mg\sin\vartheta\left[2\ell + s\left(1 - \frac{3}{\ell}s\cos\vartheta\right)\right] = 0. \end{cases}$$

Osserviamo che $\vartheta \in [0, 2\pi)$, $s \in [0, 2\ell]$ e che la prima equazione ammette sempre le soluzioni $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ e $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$ che però, sostituite nella seconda equazione, forniscono entrambe un valore negativo di equilibrio per s e dunque sono inaccettabili. D'altra parte la seconda equazione fornisce sempre le soluzioni $\vartheta = 0$ e $\vartheta = \pi$ che, sostituite nella prima equazione, corrispondono rispettivamente ai valori $s = \frac{\ell}{3}$ ed $s = -\frac{\ell}{3}$, di cui solo il primo è accettabile. Se si richiede l'annullamento del fattore $-1 + \frac{3}{\ell}s\cos\vartheta$ della prima equazione, dalla seconda si ottengono ancora i valori $\vartheta = 0$ e $\vartheta = \pi$ rientrando nel caso precedente. Infine, richiedendo che si annulli il fattore $2\ell + s\left(1 - \frac{3}{\ell}s\cos\vartheta\right)$ della seconda equazione, si ricava dalla prima equazione $\cos\vartheta = 0$ che abbiamo già dimostrato essere inaccettabile. Dunque esiste un'unica configurazione (s, ϑ) di equilibrio $E_1 \equiv (\frac{\ell}{3}, 0)$. La corrispondente matrice hessiana si ottiene calcolando le derivate seconde dell'energia potenziale in E_1. Siccome

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = \frac{3mg}{\ell}\cos^2\vartheta \\ \\ \frac{\partial^2 V}{\partial s\partial\vartheta} = mg\sin\vartheta - 2\frac{3mg}{\ell}\cos\vartheta\sin\vartheta \\ \\ \frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2} = 2mg\ell\cos\vartheta + mgs\cos\vartheta - \frac{3mg}{\ell}s^2(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) \end{cases}$$

abbiamo

$$B_1 = mg \begin{pmatrix} \frac{3}{\ell} & 0 \\ 0 & 2\ell \end{pmatrix}$$

che è chiaramente definita positiva cosicché E_1 è configurazione di equilibrio stabile per il sistema, in virtù del teorema di Dirichlet-Lagrange. Nella configurazione E_1 la forma quadratica associata all'energia cinetica è

$$A_1 = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{22}{9}\ell^2 \end{pmatrix}$$

per cui l'equazione algebrica $\det(\lambda A - B) = 0$ è risolta da

$$\lambda_1 = 3\frac{g}{\ell} \qquad \text{e} \qquad \lambda_2 = \frac{9}{11}\frac{g}{\ell}$$

cui corrispondono le pulsazioni delle piccole oscillazioni $\omega_{1,2} = \sqrt{\lambda_{1,2}}$. Per qualificare i modi normali è sufficiente osservare che il nucleo di $\lambda_1 A_1 - B_1$ è descritto dai vettori $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_s \\ v_\vartheta \end{pmatrix}$ del tipo $\begin{pmatrix} v_s \\ 0 \end{pmatrix}$ per cui corrisponde alle oscillazioni

$$\begin{cases} s(t) = \frac{\ell}{3} + \varepsilon v_s(\alpha_1 \cos\sqrt{\lambda_1}t + \beta_1 \sin\sqrt{\lambda_1}t) \\ \vartheta(t) = 0. \end{cases}$$

Quanto al modo normale corrispondente a $\lambda = \lambda_2$ abbiamo che il nucleo di $\lambda_2 A_1 - B_1$ è descritto dai vettori $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_s \\ v_\vartheta \end{pmatrix}$ del tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ v_\vartheta \end{pmatrix}$ per cui corrisponde alle oscillazioni

$$\begin{cases} s(t) = \frac{\ell}{3} \\ \vartheta(t) = \varepsilon v_\vartheta(\alpha_2 \cos\sqrt{\lambda_2}t + \beta_2 \sin\sqrt{\lambda_2}t). \end{cases}$$