Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Correzione prova scritta
Esame di Fisica Matematica
21 settembre 2011

1. *Determinare, per il seguente sistema di vettori applicati,*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 4\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_1 - O \equiv (1, -3, 2), \\ \boldsymbol{v}_2 = 4\boldsymbol{e}_x - 4\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_2 - O \equiv (2, 1, 1), \\ \boldsymbol{v}_3 = -5\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y - 4\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_3 - O \equiv (1, 2, 3) \end{cases}$$

1. *il risultante ed il momento risultante;*
2. *il trinomio invariante;*
3. *l'equazione dell'asse centrale;*
4. *(per gli studenti che hanno frequentato nell'anno accademico corrente) Determinare un sistema di vettori applicati, equivalente a quello proposto e formato da due vettori, di cui uno applicato in $Q \equiv (2, -1, 0)$.*

Il risultante è $\boldsymbol{R} = 3\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z$ ed il momento risultante rispetto ad O è $\boldsymbol{M}_O = -26\boldsymbol{e}_x - 6\boldsymbol{e}_y + 16\boldsymbol{e}_z$ per cui il trinomio invariante è $\mathcal{I} = -74$. Siccome $|\boldsymbol{R}|^2 = 14$ e $\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{M}_O = 38\boldsymbol{e}_x - 74\boldsymbol{e}_y + 34\boldsymbol{e}_z$ i punti $Q - O = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ dell'asse centrale soddisfano le equazioni

$$\begin{cases} x & = \frac{19}{7} + 3\lambda \\ y & = -\frac{37}{7} + 2\lambda \\ z & = \frac{17}{7} + \lambda. \end{cases}$$

Per rispondere all'ultimo quesito osserviamo che, dal teorema del trasporto, si ottiene $\boldsymbol{M}_Q = -25\boldsymbol{e}_x - 4\boldsymbol{e}_y + 9\boldsymbol{e}_z$. Oltre al risultante, applichiamo in Q un vettore $-\boldsymbol{v}$ per ora incognito e in un punto S incognito applichiamo il vettore $\boldsymbol{v}$. Occorre che

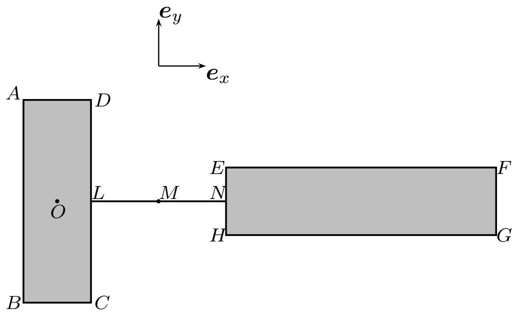
$$(S - Q) \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{M}_Q$$

e dunque bisogna scegliere $\boldsymbol{v}$ in modo che $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{M}_Q = 0$: ad esempio $\boldsymbol{v} = 9\boldsymbol{e}_y + 4\boldsymbol{e}_z$. Allora sarà

$$S - Q = \frac{1}{97}(97\boldsymbol{e}_x - 100\boldsymbol{e}_y + 225\boldsymbol{e}_z)$$

per cui $S - O = 3\boldsymbol{e}_x - \frac{197}{97}\boldsymbol{e}_y + \frac{225}{97}\boldsymbol{e}_z$.

2. *Un corpo rigido piano è formato da due rettangoli omogenei. Il primo, con centro di simmetria O ha lati di lunghezza $AD = BC = \ell$, $AB = CD = 3\ell$ e di massa $2m$ e l'altro, di lati $EF = GH = 4\ell$ ed*



$FG = EH = \ell$, di massa $3m$. I due rettangoli hanno i punti medi dei lati CD ed EH saldati ortogonalmente agli estremi di un'asta LN di lunghezza 2ℓ e massa m, come indicato in figura Ad un certo istante $t = 0$ il corpo occupa la configurazione indicata in figura e la velocità di A è $\boldsymbol{v}_A = v_0(2\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y)$ mentre quella di G è $\boldsymbol{v}_G = v_0(6\boldsymbol{e}_x + 17\boldsymbol{e}_y)$, dove v_0 è una velocità caratteristica.

1. Determinare la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(0)$ del corpo all'istante $t = 0$;
2. trovare la velocità $\boldsymbol{v}_O(0)$ del punto O all'istante $t = 0$;
3. trovare analiticamente la posizione del centro di istantanea rotazione all'istante $t = 0$ rispetto al punto O;
4. determinare le coordinate del centro di massa del corpo rispetto al punto O;
5. determinare il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse passante per O e diretto lungo $\boldsymbol{e}_y$;
6. determinare il momento di inerzia rispetto all'asse passante per il punto medio M dell'asta e inclinato di $\frac{\pi}{4}$ sull'orizzontale.

Posto $\boldsymbol{\omega}(0) = \omega\boldsymbol{e}_z$ si ha

$$\boldsymbol{v}_G - \boldsymbol{v}_A = v_0(4\boldsymbol{e}_x + 14\boldsymbol{e}_y) = \omega\ell\boldsymbol{e}_z \wedge (7\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y)$$

da cui segue $\omega = \frac{2v_0}{\ell}$ e quindi

$$\boldsymbol{v}_O(0) = \boldsymbol{v}_A(0) + v_0\boldsymbol{e}_z \wedge (\boldsymbol{e}_x - 3\boldsymbol{e}_y) = v_0(5\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y).$$

Infine, scritto il vettore posizione del centro C^* di istantanea rotazione rispetto ad O come $C^* - O = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y$, deve essere

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}_{C^*} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge (C^* - O)$$

che fornisce

$$x = -2\ell \qquad y = \frac{5}{2}\ell.$$

Per simmetria, la coordinata y_G del centro di massa del sistema rispetto ad O è $y_G = 0$ mentre l'ascissa di ottiene osservando che le ascisse dei centri di massa di $ABCD$, $EFGH$ e di LN sono, rispettivamente: 0, $\frac{9}{2}\ell$ e $\frac{3}{2}\ell$ per cui, considerando le masse delle varie parti del sistema,

$$x_G = \frac{3m \cdot \frac{9}{2}\ell + m \cdot \frac{3}{2}\ell}{6m} = \frac{5}{2}\ell.$$

Siccome O è centro di massa di $ABCD$, $I^{ABDC}_{O,\boldsymbol{e}_y} = \frac{m\ell^2}{6}$ mentre applicando il teorema di Huygens-Steiner ad LN e ad $EFGH$ si ottiene $I^{LN}_{O,\boldsymbol{e}_y} = \frac{m\ell^2}{3} + \frac{9}{4}m\ell^2 = \frac{31}{12}m\ell^2$ ed $I^{EFGH}_{O,\boldsymbol{e}_y} = 4m\ell^2 + \frac{243m\ell^2}{4} = \frac{259}{4}m\ell^2$ e quindi, in definitiva,

$$I_{O,\boldsymbol{e}_y} = \frac{135}{2}m\ell^2.$$

Sia $\boldsymbol{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)$ il versore associato all'asse rispetto al quale occorre calcolare il momento di inerzia. Osserviamo poi che $I^{LN}_{M,\boldsymbol{n}} = \frac{m\ell^2}{3}\sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{6}m\ell^2$. Il contributo di $ABCD$ si ottiene applicando il teorema di Huygens-Steiner e la definizione di momento di inerzia

$$I^{ABDC}_{M,\boldsymbol{e}_y} = \boldsymbol{n}\cdot \mathbb{I}^{ABCD}_O \boldsymbol{n} + \frac{9}{4}m\ell^2$$

dove $\mathbb{I}^{ABCD}_O$ è il tensore centrale di inerzia del rettangolo. Poiché

$$\mathbb{I}^{ABCD}_O = \frac{m\ell^2}{6}\left[9\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_y + 10\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_z\right]$$

abbiamo, servendoci del formalismo matriciale,

$$\boldsymbol{n}\cdot \mathbb{I}^{ABCD}_O \boldsymbol{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\frac{m\ell^2}{6}\begin{pmatrix}9&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{5}{6}m\ell^2$$

da cui

$$I^{ABDC}_{M,\boldsymbol{n}} = \frac{37}{12}m\ell^2.$$

Similmente si ha

$$I^{EFGH}_{M,\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n}\cdot \mathbb{I}^{EFGH}_Q \boldsymbol{n} + \frac{27}{2}m\ell^2$$

dove abbiamo indicato con Q il centro di massa di $EFGH$. Siccome

$$\mathbb{I}^{EFGH}_Q = \frac{m\ell^2}{4}\left[\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_x + 16\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_y + 17\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_z\right]$$

abbiamo

$$\boldsymbol{n}\cdot \mathbb{I}^{EFGH}_Q \boldsymbol{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\frac{m\ell^2}{4}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&16&0\\0&0&17\end{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{17}{8}m\ell^2$$

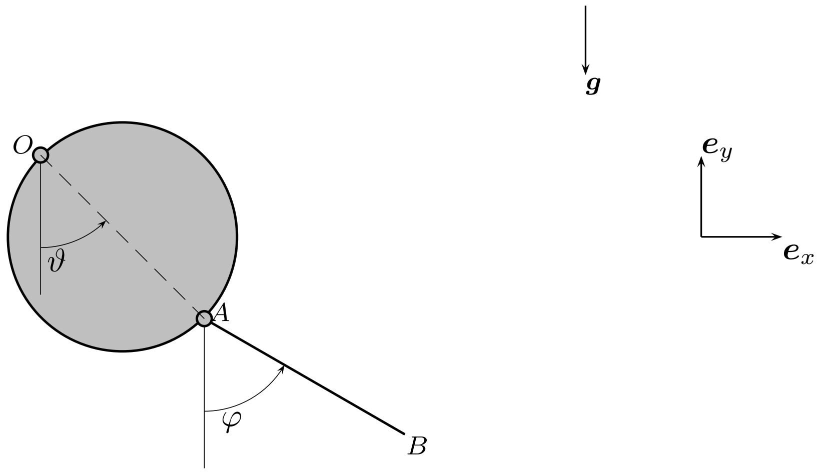
e quindi

$$I^{EFGH}_{M,\boldsymbol{n}} = \frac{115}{8}m\ell^2.$$

Sommando i vari contributi si ricava

$$I_{M,\boldsymbol{n}} = \frac{141}{8}m\ell^2$$

3. *In un piano verticale, un disco omogeneo di raggio R ed massa $2m$ ruota attorno ad un asse passante per un punto fisso O della sua circonferenza. Nel punto A, diametralmente opposto ad O, è incernierato l'estremo*



di un'asta AB di massa m e lunghezza $2R$. Introdotte le coordinate lagrangiane ϑ e φ indicate in figura, determinare l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema, individuando le configurazioni di equilibrio e studiandone la stabilità. Determinare le pulsazioni delle piccole oscillazioni intorno alla configurazione di equilibrio stabile.

La velocità angolare del disco è $\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$ mentre quella dell'asta è $\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_z$. Introduciamo due basi ortonormali $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_z\}$ e $\{\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_z\}$ positivamente orientate e solidali, rispettivamente, al disco e all'asta, con $\boldsymbol{e}_1$ lungo $A - O$ e $\boldsymbol{e}_3$ lungo $B - A$. Detto G il centro di massa di AB ed utilizzando il teorema di Huygens-Steiner per il calcolo del momento di inerzia del disco rispetto all'asse passante per O e diretto lungo $\boldsymbol{e}_z$, abbiamo

$$T = \frac{3}{2}mR^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{6}mR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2}v_G^2.$$

Per il calcolo di v_G^2 osserviamo che

$$G - O = R(2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3)$$

e quindi, grazie alle formule di Poisson,

$$\boldsymbol{v}_G = R(2\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_2 + \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_4) \qquad \text{da cui} \qquad v_G^2 = R^2(4\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 4\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_4) = R^2(4\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 4\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos(\varphi - \vartheta).$$

Dunque

$$T = \frac{7}{2}mR^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{2}{3}mR^2\dot{\varphi}^2 + 2mR^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos(\varphi - \vartheta).$$

L'energia potenziale consta solo dei termini gravitazionali e, preso per riferimento l'orizzontale passante per O, vale

$$V = -2mgR\cos\vartheta - mgR(2\cos\vartheta + \cos\varphi) = -4mgR\cos\vartheta - mgR\cos\varphi.$$

Le posizioni di equilibrio sono le soluzioni (ϑ, φ) di

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = 4mgR\sin\vartheta = 0 \\[2ex] \frac{\partial V}{\partial \varphi} = mgR\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

cioè: $E_1 \equiv (0,0)$, $E_2 \equiv (\pi,\pi)$, $E_3 = (0,\pi)$,$E_4 = (\pi, 0)$. Per determinarne la stabilità consideriamo le derivate seconde di V

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} = 4mgR\cos\vartheta \\ \\ \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi\partial\vartheta} = 0 \\ \\ \frac{\partial^2 V}{\partial^2 \varphi} = mgR\cos\varphi \end{cases}$$

da cui si deduce che le configurazioni E_2, E_3 ed E_4 sono instabili perché le hessiane corrispondenti hanno almeno un autovalore negativo. La hessiana in E_1 è

$$B = mgR \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed è definita positiva, corrispondendo ad un minimo di V e quindi ad una configurazione di equilibrio stabile. Occorre ora diagonalizzare simultaneamente B con la forma quadratica A associata all'energia cinetica che è data da

$$A = mR^2 \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

risolvendo l'equazione algebrica $\det(\lambda A - B) = 0$, cioè

$$16\lambda^2 - 37\lambda\frac{g}{R} + 12\left(\frac{g}{R}\right)^2 = 0$$

le cui soluzioni sono

$$\lambda_\pm = \frac{37 \pm \sqrt{601}}{32}\frac{g}{R}$$

cui corrispondono le pulsazioni delle piccole oscillazioni $\omega_\pm = \sqrt{\lambda_\pm}$.