Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Correzione prova scritta
Esame di Fisica Matematica
22 febbraio 2012

1. *Determinare, per il seguente sistema di vettori applicati,*

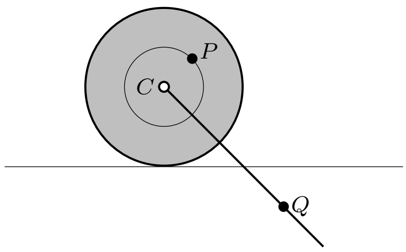
$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (2,2,2), \\ \boldsymbol{v}_2 = 3\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y - 3\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (1,-3,2), \\ \boldsymbol{v}_3 = -2\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (2,4,-1) \end{cases}$$

il risultante, il momento risultante, il trinomio invariante e l'equazione dell'asse centrale.

Il risultante è $\boldsymbol{R} = 2\boldsymbol{e}_x + 5\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z$ ed il momento risultante rispetto ad O è $\boldsymbol{M}_O = 5\boldsymbol{e}_x + 5\boldsymbol{e}_y + 21\boldsymbol{e}_z$ per cui il trinomio invariante è $\mathcal{I} = 56$. Siccome $|\boldsymbol{R}|^2 = 30$ e $\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{M}_O = 100\boldsymbol{e}_x - 37\boldsymbol{e}_y - 15\boldsymbol{e}_z$ i punti $Q - O = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ dell'asse centrale soddisfano le equazioni

$$\begin{cases} x &= \frac{10}{3} + 2\lambda \\ y &= -\frac{37}{30} + 5\lambda \\ z &= -\frac{1}{2} + \lambda. \end{cases}$$

2. *In un piano, un disco è libero di rotolare senza strisciare su una guida orizzontale. Nel disco è praticata una scanalatura circolare entro cui è libero di muoversi un punto materiale P, mentre al centro C del disco è incernierata un'asta su cui è libero di muoversi un altro punto materiale Q. Determinare il numero di gradi*

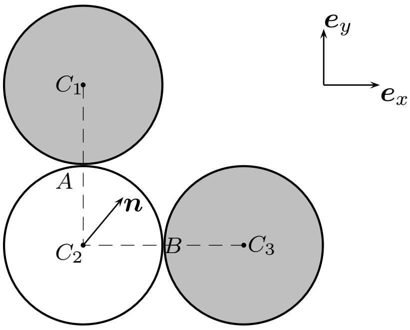


di libertà del sistema ed individuare un opportuno sistema di coordinate lagrangiane.

Il vincolo di puro rotolamento riduce ad uno il numero di gradi di libertà del disco: come coordinata corrispondente si può prendere l'ascissa x di C rispetto ad un'origine O fissa. Bloccato il disco, occorre un altro angolo per individuare la posizione di P entro la scanalatura: ad esempio, si può prendere l'angolo ϑ

che il raggio vettore $P-C$ forma con la direzione orizzontale; sempre a disco fissato, serve un altro angolo per bloccare la posizione dell'asta, ad esempio l'angolo φ che essa forma con la verticale. Infine, individuata la posizione dell'asta, bisogna fissare il valore dell'ascissa s di Q sull'asta, prendendola ad esempio con origine in C. A questo punto il sistema non ha più alcuna libertà di movimento e dunque esso ha quattro gradi di libertà.

3. *Una lamina piana è formata da due dischi, centrati in C_1 e C_3, di masse rispettive m e $2m$, e da un anello centrato in C_2, di massa $3m$, saldati in modo da risultare tangenti esternamente in A e B, con C_1C_2 ortogonale a C_2C_3. Entrambi i dischi e l'anello hanno lo stesso raggio R e ad un certo istante $t=0$ la*



lamina occupa la configurazione indicata in figura e la velocità di A è $\boldsymbol{v}_A = v_0(\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y)$ mentre quella di B è $\boldsymbol{v}_B = -v_0(4\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)$, dove v_0 è una velocità caratteristica. Determinare la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(0)$ del corpo all'istante $t=0$; la velocità $\boldsymbol{v}_1(0)$ del punto C_1 all'istante $t=0$; la posizione del centro di istantanea rotazione all'istante $t=0$ rispetto al punto C_2, in modo analitico; le coordinate del centro di massa della lamina rispetto al punto C_2; il momento di inerzia della lamina rispetto all'asse passante per C_1 e diretto lungo $\boldsymbol{e}_x$; il momento centrale di inerzia della lamina rispetto alla direzione $\boldsymbol{n}$ inclinata di $\frac{\pi}{4}$ rispetto all'orizzontale.

Posto $\boldsymbol{\omega}(0) = \omega\boldsymbol{e}_z$ si ha, usando la formula fondamentale della cinematica rigida,

$$\boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{v}_B = 5v_0(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y) = \boldsymbol{\omega} \wedge (A-B) = \omega R\boldsymbol{e}_z \wedge (-\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)$$

da cui si ottiene $\omega = -\frac{5v_0}{R}$ e quindi

$$\boldsymbol{v}_1(0) = \boldsymbol{v}_A(0) - \frac{5v_0}{R}\boldsymbol{e}_z \wedge (R\boldsymbol{e}_y) = 2v_0(3\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y).$$

Scritto il vettore posizione del centro C^* di istantanea rotazione rispetto ad C_1 come

$$C^* - C_1 = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y,$$

abbiamo

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}_{C^*} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{\omega} \wedge (C^* - C_1)$$

da cui segue

$$x = \frac{4}{5}R \qquad y = -\frac{6}{5}R$$

e quindi, siccome $C_1 - C_2 = 2R\boldsymbol{e}_y$ abbiamo

$$C^* - C_2 = (C^* - C_1) + (C_1 - C_2) = \frac{4}{5}R(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y).$$

Per ricavare le coordinate (x_G, y_G) del centro di massa G della lamina rispetto a C_2 basta applicare la proprietà distributiva del centro di massa osservando che, rispetto a C_2, C_1 ha coordinate $(0, 2R)$ mentre C_3 ha coordinate $(2R, 0)$. Abbiamo allora

$$x_G = \frac{4mR}{6m} = \frac{2}{3}R \qquad y_G = \frac{2mR}{6m} = \frac{R}{3}.$$

Per il calcolo del momento di inerzia rispetto all'asse passante per C_1, diretto lungo $\boldsymbol{e}_x$, osserviamo che il contributo del disco centrato in C_1 si riduce a quello centrale, pari a $\frac{1}{4}mR^2$ mentre, servendosi del teorema di Huygens-Steiner ed osservando che l'asse passante per C_2 e C_3 diretto lungo $\boldsymbol{e}_x$ dista $2R$ da quello parallello ma passante per C_1 otteniamo i valori $\frac{3}{2}mR^2 + 12mR^2 = \frac{27}{2}mR^2$, per il contributo dell'anello centrato in C_2 e $\frac{1}{2}mR^2 + 8mR^2 = \frac{17}{2}mR^2$, per il contributo del disco di centro C_3 cosicché il momento di inerzia richiesto vale

$$I_{C_1, \boldsymbol{e}_x} = \frac{89mR^2}{4}.$$

Per il calcolo del momento centrale di inerzia complessivo nella direzione $\boldsymbol{n}$, inclinata di $\frac{\pi}{4}$ sull'orizzontale, osserviamo che la retta passante per G e diretta come $\boldsymbol{n}$ ha equazione

$$x - y = \frac{R}{3}$$

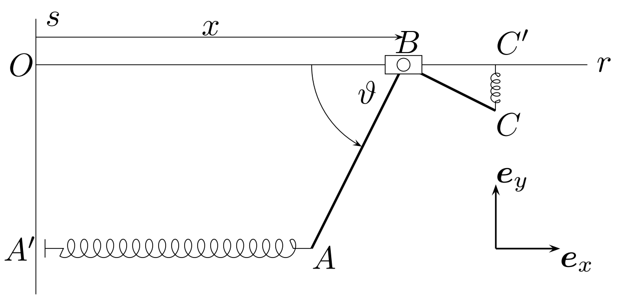
in un riferimento $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$ centrato in C_2. Pertanto essa interseca l'asse delle ascisse nel punto di coordinate $(\frac{R}{3}, 0)$, distante $\frac{R}{3}$ da C_2 e $\frac{5}{3}R$ da C_3, e l'asse delle ordinate nel punto di coordinate $(0, -\frac{R}{3})$, distante $\frac{7}{3}R$ da C_1. Si ricava pertanto che la distanza degli assi, paralleli ad $\boldsymbol{n}$ e passanti rispettivamente per C_1, C_2 e C_3, dall'asse passante per G sempre diretto lungo $\boldsymbol{n}$ sono nell'ordine $\frac{7}{6}\sqrt{2}R$, $\frac{1}{6}\sqrt{2}R$ e $\frac{5}{6}\sqrt{2}R$. Applicando ripetutamente il teorema di Huygens-Steiner otteniamo

$$I_{G,\boldsymbol{n}} = \left(\frac{1}{4} + \frac{49}{18}\right)mR^2 + \left(1 + \frac{1}{9}\right)mR^2 + \left(\frac{3}{4} + \frac{25}{6}\right)mR^2 = 9mR^2.$$

3. *In un piano verticale, un'asta a forma di L è formata da due bracci AB e BC saldati ortogonalmente nell'estremo comune. Il braccio AB ha massa $3m$ e lunghezza 2ℓ mentre BC ha massa $2m$ e lunghezza ℓ. L'asta è incernierata in B, libero di muoversi su una guida orizzontale r, A è attratto da una molla ideale di costante elastica mg/ℓ verso un punto A' di una guida s verticale, posto alla stessa quota di A, mentre C è attratto da una molla ideale di costante elastica $3mg/\ell$ verso un punto C' di r, in modo che CC' sia sempre verticale. Introdotte le coordinate lagrangiane x e ϑ indicate in figura determinare la lagrangiana del sistema e scrivere le equazioni di Lagrange. Se all'istante $t = 0$ il sistema parte dalla quiete con $x(0) = \ell$ e $\vartheta(0) = \frac{\pi}{2}$, trovare $\ddot{x}(0)$ e $\ddot{\vartheta}(0)$.*

I due bracci AB e BC formano un unico corpo rigido che ruota con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$. Siano $\boldsymbol{e}_1$ ed $\boldsymbol{e}_2$ i versori diretti come $A - B$ e $C - B$, rispettivamente, in modo che sia $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_z$. Inoltre, siano G_1 e G_2 i centri di massa di AB 4 BC. Grazie al teorema di König l'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{3}{2}mv_{G_1}^2 + \frac{1}{2}I_{G_1,\boldsymbol{e}_z}^{(AB)}\dot{\vartheta}^2 + mv_{G_2}^2 + \frac{1}{2}I_{G_2,\boldsymbol{e}_z}^{(BC)}\dot{\vartheta}^2, \tag{1}$$



dove $I^{(AB)}_{G_1,\boldsymbol{e}_z}$ ed $I^{(BC)}_{G_2,\boldsymbol{e}_z}$ sono, rispettivamente, i momenti centrali di inerzia di AB e BC nella direzione $\boldsymbol{e}_z$, per cui

$$I^{(AB)}_{G_1,\boldsymbol{e}_z} = m\ell^2 \qquad \text{e} \qquad I^{(BC)}_{G_2,\boldsymbol{e}_z} = \frac{1}{6}m\ell^2.$$

Detto O il punto di intersezione tra le guide r ed s, abbiamo

$$G_1 - O = x\boldsymbol{e}_x + \ell\boldsymbol{e}_1 \qquad G_2 - O = x\boldsymbol{e}_x + \frac{\ell}{2}\boldsymbol{e}_2$$

e dunque, grazie alle formule di Poisson,

$$\boldsymbol{v}_{G_1} = \dot{x}\boldsymbol{e}_x + \ell\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_2 \qquad \boldsymbol{v}_{G_2} = \dot{x}\boldsymbol{e}_x - \frac{\ell}{2}\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_1.$$

Inserendo i contributi trovati in (1), otteniamo

$$T = \frac{3}{2}m\left[\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\vartheta}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\right] + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + m\left[\dot{x}^2 + \frac{1}{4}\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \ell\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta\right] + \frac{1}{12}m\ell^2\dot{\vartheta}^2$$

dove abbiamo osservato che $\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_x = \sin\vartheta$ e $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_x = \cos(\pi - \vartheta) = -\cos\vartheta$. Dopo alcune semplificazioni otteniamo

$$T = \frac{5}{2}m\dot{x}^2 + \frac{7}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + m\ell\dot{x}\dot{\vartheta}(3\sin\vartheta + \cos\vartheta).$$

L'energia potenziale della molla AA' è $\frac{mg}{2\ell}(x - 2\ell\cos\vartheta)^2$, quella di CC' è $\frac{3mg}{2}\ell(\cos^2\vartheta)$ mentre, presa come quota di riferimento per l'energia potenziale gravitaizonale quella dei punti di r, i contributi della forza peso all'energia potenziale sono

$$-3mg\ell\sin\vartheta - mg\ell\cos\vartheta$$

per cui otteniamo

$$V = \frac{mg}{2\ell}(x - 2\ell\cos\vartheta)^2 + \frac{3mg}{2}\ell\cos^2\vartheta - 3mg\ell\sin\vartheta - mg\ell\cos\vartheta$$

e quindi la funzione di Lagrange è

$$L = \frac{5}{2}m\dot{x}^2 + \frac{7}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + m\ell\dot{x}\dot{\vartheta}(3\sin\vartheta + \cos\vartheta) - \frac{mg}{2\ell}x^2 - \frac{7mg}{2}\ell\cos^2\vartheta + 2mgx\cos\vartheta + 3mg\ell\sin\vartheta + mg\ell\cos\vartheta.$$

cosicché le equazioni di Lagrange per le variabili x e ϑ sono

$$5m\ddot{x} + m\ell[\ddot{\vartheta}(3\sin\vartheta + \cos\vartheta) + \dot{\vartheta}^2(3\cos\vartheta - \sin\vartheta)] = -\frac{mg}{\ell}x + 2mg\cos\vartheta$$

$$\frac{14}{3}m\ell^2\ddot{\vartheta} + m\ell[\ddot{x}(3\sin\vartheta + \cos\vartheta) + \dot{x}\dot{\vartheta}(3\cos\vartheta - \sin\vartheta)] = 7mg\ell\cos\vartheta\sin\vartheta - 2mgx\sin\vartheta + 3mg\ell\cos\vartheta - mg\ell\sin\vartheta.$$

Inserendo le condizioni iniziali del testo—la quiete impone $\dot{x}(0) = 0$ e $\dot{\vartheta}(0) = 0$—abbiamo

$$5\ddot{x}(0) + 3\ell\ddot{\vartheta}(0) = -g$$

$$3\ddot{x}(0) + \tfrac{14}{3}\ell\ddot{\vartheta}(0) = -3g$$

che, risolto rispetto a $\ddot{x}(0)$ e $\ddot{\vartheta}(0)$, fornisce

$$\ddot{\vartheta}(0) = -\frac{36}{47}\frac{g}{\ell} \qquad \ddot{x}(0) = \frac{61}{235}g.$$