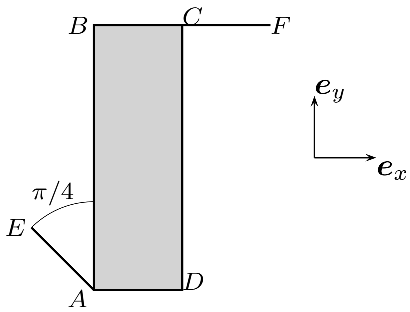
Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
***Correzione prova scritta***
*31 gennaio 2011*

**1.** *Un corpo rigido piano è formato da due aste omogenee $AE$ e $CF$, ciascuna di massa $3m$ e lunghezza $3\ell/2$, saldate ai vertici $A$ e $C$ di un rettangolo omogeneo $ABCD$ di massa $m$ e lati di lunghezza $AB = 6\ell$ e $BC = \ell$. L'asta $AE$ è inclinata di $\pi/4$ rispetto al lato $AB$. Ad un certo istante $t = t_0$ il corpo occupa la*




*configurazione indicata in figura e la velocità di $A$ è $\boldsymbol{v}_A = v_0\boldsymbol{e}_y$ e quella di $C$ è $\boldsymbol{v}_C = v_0(12\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y)$, dove $v_0$ è una velocità caratteristica.*

1. Determinare la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t_0)$ del corpo;
2. trovare la velocità $\boldsymbol{v}_B(t_0)$ del vertice $B$ all'istante $t_0$;
3. trovare analiticamente la posizione del centro di istantanea rotazione all'istante $t_0$, rispetto ad $A$;
4. determinare il momento di inerzia del corpo rispetto ad un asse passante per il punto $A$ e diretto lungo $\boldsymbol{e}_x$.

Scritto $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_z$ abbiamo

$$\boldsymbol{v}_C - \boldsymbol{v}_A = v_0(12\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y) = \omega\ell(-6\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)$$

da cui segue $\omega = -2\frac{v_0}{\ell}$ e quindi

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge (B - A) = \boldsymbol{v}_A - 2\frac{v_0}{\ell}\boldsymbol{e}_z \wedge 6\ell\boldsymbol{e}_y = v_0(12\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y).$$

Infine, la posizione del centro $Q$ di istantantea rotazione rispetto ad $A$ si può scrivere come $Q - A = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y$ e deve essere

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}_Q = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge (Q - A)$$

che, a conti fatti, equivale a

$$x = \frac{\ell}{2} \qquad y = 0.$$

Il momento di inerzia $I_{A,\boldsymbol{e}_x}$ richiesto è la somma di tre contributi: quello del rettangolo che, grazie al teorema di Huygens-Steiner, si esprime come

$$I_1 = 3m\ell^2 + 9m\ell^2 = 12m\ell^2;$$

il contributo dell'asta $AE$

$$I_2 = \frac{9}{4}m\ell^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{9}{8}m\ell^2$$

e quello dell'asta $BF$

$$I_3 = 108m\ell^2.$$

In definitiva,

$$I_{A,\boldsymbol{e}_x} = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{969}{8}m\ell^2.$$

**2.** *Considerare il seguente sistema di vettori applicati:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 3\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y - 3\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (-1,1,0), \\ \boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (1,0,1), \\ \boldsymbol{v}_3 = -\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y - 3\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (3,-1,1). \end{cases}$$

1. *Calcolare il risultante ed il momento risultante del sistema.*
2. *Calcolare il trinomio invariante del sistema.*
3. *Determinare l'equazione dell'asse centrale del sistema.*
4. *(per studenti che hanno frequentato nel corrente anno accademico) Determinare un sistema di vettori applicati equivalente a quello assegnato e formato da due vettori, di cui uno applicato in* $(2,0,0)$.

Il risultante del sistema è $\boldsymbol{R} = 4\boldsymbol{e}_x + 5\boldsymbol{e}_y - 5\boldsymbol{e}_z$ ed il momento risultante rispetto ad $O$ è $\boldsymbol{M}_O = -3\boldsymbol{e}_x + 6\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z$, pertanto il trinomio invariante è

$$\mathcal{I} = 23.$$

Per trovare l'equazione dell'asse centrale, calcoliamo $\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{M}_O = 25\boldsymbol{e}_x + 19\boldsymbol{e}_y + 39\boldsymbol{e}_z$ e $|\boldsymbol{R}|^2 = 66$ per cui, in forma parametrica

$$\begin{cases} x = \frac{25}{66} + 4\lambda \\ y = \frac{19}{66} + 5\lambda \\ z = \frac{13}{22} - 5\lambda \end{cases}$$

è l'equazione dell'asse centrale. Dal teorema del trasporto sappiamo che

$$\boldsymbol{M}_Q = \boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{R} \wedge (Q - O) = -(3\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y + 11\boldsymbol{e}_z).$$

Un sistema equivalente che soddisfi le richieste del testo può essere $\Sigma := \{(\boldsymbol{R}, Q), (-\boldsymbol{v}, Q), (\boldsymbol{v}, P)\}$ dove

$$(P - Q) \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{M}_Q = -(3\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y + 11\boldsymbol{e}_z).$$

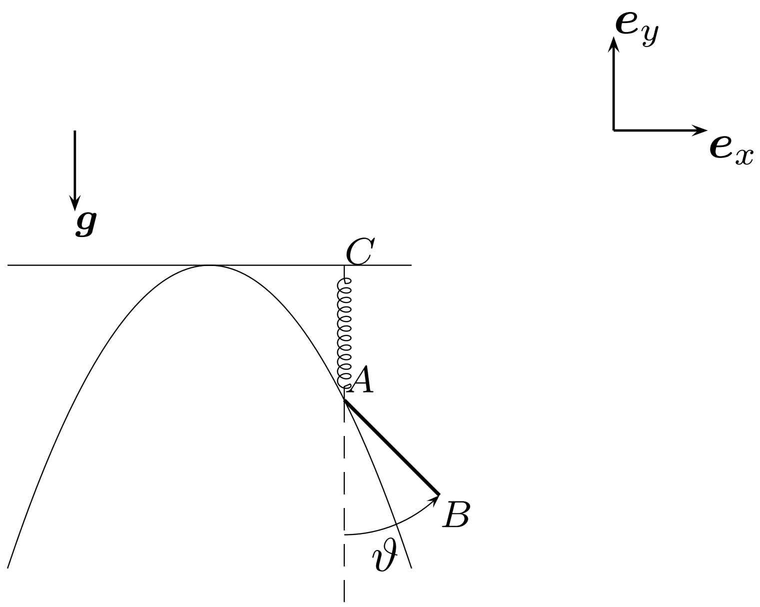
Questa equazione si può sempre soddisfare prendendo $\boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{e}_x - 3\boldsymbol{e}_y$, cosicché $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{M}_Q = 0$, e

$$P - Q = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|^2}\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{M}_Q = \frac{1}{25}(33\boldsymbol{e}_x + 44\boldsymbol{e}_y - 25\boldsymbol{e}_z)$$

per cui

$$P - O = (P - Q) + (Q - O) = \frac{83}{25}\boldsymbol{e}_x + \frac{44}{25}\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z.$$

**3.** *In un piano verticale, un'asta $AB$ di massa $2m$ e lunghezza $\ell$ ha l'estremo $A$ mobile su una parabola di equazione $y = -x^2/\ell$ e sollecitato da una forza elastica ideale di costante $2mg/\ell$ che lo attrae verso il punto mobile $C$ dell'asse $\boldsymbol{e}_x$ posto sulla stessa verticale. Introdotte l'ascissa $x$ di $A$ (l'origine del riferimento cartesiano coincide con il vertice della parabola) e l'angolo $\vartheta$ indicato in figura, determinare l'energia cinetica e quella potenziale del sistema. Studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio e determinare le pulsazioni delle piccole oscillazioni in un intorno di una posizione di equilibrio stabile.*




Se $G$ è il centro di massa di $AB$, l'energia cinetica dell'asta si scrive nella forma

$$T = mv_G^2 + \frac{1}{12}m\ell^2\dot{\vartheta}^2$$

e per calcolare $\boldsymbol{v}_G$ osserviamo che

$$G - O = x\boldsymbol{e}_x - \frac{x^2}{\ell}\boldsymbol{e}_y + \frac{\ell}{2}\boldsymbol{e}_1$$

dove $O$ è il vertice della parabola ed $\boldsymbol{e}_1$ è il versore diretto come $B - A$, solidale all'asta che ruota con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$. Grazie alle formule di Poisson abbiamo

$$\boldsymbol{v}_G = \dot{x}\boldsymbol{e}_x - 2\frac{x\dot{x}}{\ell}\boldsymbol{e}_y + \frac{\ell}{2}\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_2,$$

dove $\boldsymbol{e}_2$ è il versore del piano di moto, ortogonale ad $\boldsymbol{e}_1$ ed orientato in modo che sia $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_z$. Osservando che l'angolo tra $\boldsymbol{e}_x$ ed $\boldsymbol{e}_2$ è $\vartheta$, mentre quello tra $\boldsymbol{e}_y$ ed $\boldsymbol{e}_2$ è $\frac{\pi}{2} - \vartheta$, abbiamo

$$v_G^2 = \dot{x}^2 + 4\frac{x^2\dot{x}^2}{\ell^2} + \frac{\ell^2}{4}\dot{\vartheta}^2 - 2x\dot{x}\dot{\vartheta}\sin\vartheta + \ell\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta$$

e dunque

$$T = m[\dot{x}^2 + 4\frac{x^2\dot{x}^2}{\ell^2} + \frac{\ell^2}{3}\dot{\vartheta}^2 - 2x\dot{x}\dot{\vartheta}\sin\vartheta + \ell\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta].$$

L'energia potenziale consta di due contributi, dovuti alla forza di gravità ed alla forza elastica:

$$V = -2mg\left(\frac{x^2}{\ell} + \frac{\ell}{2}\cos\vartheta\right) + \frac{mg}{\ell^3}x^4.$$

Le configurazioni di equilibrio ordinarie sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} V_{,x} = 4\frac{mg}{\ell}\left(\frac{x^3}{\ell^2} - x\right) \\ V_{,\vartheta} = mg\ell\sin\vartheta \end{cases}$$

e dunque sono individuate dalle seguenti coppie $(x, \vartheta)$

$$E_1 = (0,0) \quad E_2 = (0,\pi) \quad E_3 = (\ell,0) \quad E_4 = (\ell,\pi) \quad E_5 = (-\ell,0) \quad E_6 = (-\ell,\pi).$$

La forma hessiana di $V$ è diagonale ed ha elementi

$$V_{,xx} = 4\frac{mg}{\ell}\left(3\frac{x^2}{\ell^2} - 1\right) \qquad V_{,x\vartheta} = 0 \qquad V_{,\vartheta\vartheta} = mg\ell\cos\vartheta$$

da cui si vede che le configurazioni $E_2$, $E_4$ ed $E_6$ hanno un autovalore negativo e l'altro positivo o negativo per cui sono instabili per il primo criterio di Ljapunov. Similmente, $E_1$ corrisponde ad un punto di sella di $V$ ed è parimenti instabile. Quanto ad $E_3$ ed $E_5$, la forma hessiana è la stessa nei due casi e vale

$$B = \begin{pmatrix} 8\frac{mg}{\ell} & 0 \\ 0 & mg\ell \end{pmatrix}$$

che è definita positiva: le corrispondenti configurazioni di equilibrio sono dunque stabili. La corrispondente forma quadratica associata all'energia cinetica è

$$A = \begin{pmatrix} 10m & m\ell \\ m\ell & \frac{2}{3}m\ell^2 \end{pmatrix}$$

Per trovare le pulsazioni delle piccole oscillazioni occorre risolvere l'equazione $\det(\lambda A - B) = 0$ che in questo caso è, dopo qualche semplificazione,

$$17\lambda^2 - 46\frac{g}{\ell}\lambda + 24\frac{g^2}{\ell^2} = 0$$

le cui radici sono

$$\lambda_\pm = \frac{g}{\ell}\frac{23 \pm 11}{17}:$$

le pulsazioni delle piccole oscillazioni sono

$$\omega_+ = \sqrt{\lambda_+} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}} \quad \omega_- = \sqrt{\lambda_-} = \sqrt{\frac{12g}{17\ell}}.$$