Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Correzione prova scritta
7 luglio 2011

1. *Determinare, per il seguente sistema di vettori applicati,*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = -2\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_1 - O \equiv (1,-1,3), \\ \boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_2 - O \equiv (2,-1,2), \\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y + 4\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_3 - O \equiv (1,-1,1) \end{cases}$$

1. *il risultante ed il momento risultante;*
2. *il trinomio invariante;*
3. *l'equazione dell'asse centrale;*
4. *(per gli studenti che hanno frequentato nell'anno accademico corrente) Determinare un sistema di vettori applicati, equivalente a quello proposto e formato da due vettori, di cui uno applicato in $Q \equiv (-2,2,4)$.*

Il risultante è $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y + 4\boldsymbol{e}_z$ ed il momento risultante rispetto ad O è $\boldsymbol{M}_O = -8\boldsymbol{e}_x - 4\boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z$ per cui il trinomio invariante è $\mathcal{I} = -8$. Siccome $|\boldsymbol{R}|^2 = 26$ e $\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{M}_O = 25\boldsymbol{e}_x - 35\boldsymbol{e}_y + 20\boldsymbol{e}_z$ i punti $Q - O = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ dell'asse centrale soddisfano le equazioni

$$\begin{cases} x = \frac{25}{26} + \lambda \\ \\ y = -\frac{35}{26} + 3\lambda \\ \\ z = \frac{10}{13} + 4\lambda. \end{cases}$$

Per rispondere all'ultimo quesito osserviamo che, dal teorema del trasporto, si ottiene $\boldsymbol{M}_Q = -4\boldsymbol{e}_x - 16\boldsymbol{e}_y + 11\boldsymbol{e}_z$. Oltre al risultante, applichiamo in Q un vettore $-\boldsymbol{v}$ per ora incognito e in un punto S incognito applichiamo il vettore $\boldsymbol{v}$. Occorre che

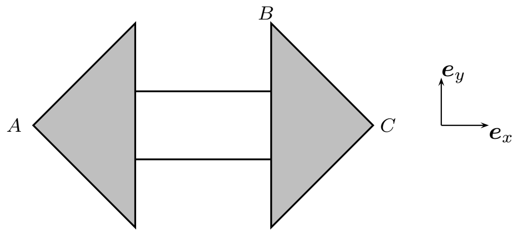
$$(S - Q) \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{M}_Q$$

e dunque bisogna scegliere $\boldsymbol{v}$ in modo che $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{M}_Q = 0$: ad esempio $\boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y$. Allora sarà

$$S - Q = -\frac{1}{17}(11\boldsymbol{e}_x + 44\boldsymbol{e}_y + 68\boldsymbol{e}_z)$$

per cui $S - O = -\frac{1}{17}(45\boldsymbol{e}_x + 10\boldsymbol{e}_y)$

2. *Due aste omogenee, ciascuna di massa m e lunghezza 2ℓ, sono disposte su rette parallele a distanza ℓ tra loro ed hanno gli estremi saldati alle ipotenuse di due triangoli rettangoli isosceli di ugual massa $3m$. Tali ipotenuse sono lunghe 3ℓ ed hanno in comune l'asse con la bisettrice della striscia delimitata dalle aste, come indicato in figura. All'istante $t = 0$ il corpo occupa la configurazione indicata in figura e la velocità di A è $\boldsymbol{v}_A = v_0(2\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y)$ mentre quella di B è $\boldsymbol{v}_B = v_0(4\boldsymbol{e}_x - \frac{5}{3}\boldsymbol{e}_y)$, dove v_0 è una velocità caratteristica.*



1. Determinare la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(0)$ del corpo all'istante $t = 0$;

2. trovare la velocità $\boldsymbol{v}_C(0)$ del vertice del triangolo di destra all'istante $t = 0$;

3. trovare analiticamente la posizione del centro di istantanea rotazione all'istante $t = 0$ rispetto al centro di massa del sistema;

4. determinare i momenti centrali di inerzia dell'intero sistema nelle direzioni $\boldsymbol{e}_x$ ed $\boldsymbol{e}_y$.

Scritto $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_z$ abbiamo

$$\boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A = v_0(2\boldsymbol{e}_x - \frac{14}{3}\boldsymbol{e}_y) = \omega\ell\boldsymbol{e}_z \wedge (\frac{7}{2}\boldsymbol{e}_x + \frac{3}{2}\boldsymbol{e}_y)$$

da cui segue $\omega = -\frac{4v_0}{3\ell}$ e quindi

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{\omega} \wedge (C - B) = \boldsymbol{v}_B - \frac{4v_0}{3\ell}\boldsymbol{e}_z \wedge \frac{3}{2}\ell(\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y) = v_0(2\boldsymbol{e}_x - \frac{11}{3}\boldsymbol{e}_y).$$

Infine, la posizione del centro Q di istantanea rotazione rispetto ad A si può scrivere come $Q - A = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y$ e deve essere

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}_Q = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge (Q - A)$$

che, a conti fatti equivale a

$$x = \frac{9}{4}\ell \qquad y = -\frac{3}{2}\ell.$$

per cui, se G è il centro di massa del sistema, si ha $A - G = -\frac{5}{2}\boldsymbol{e}_x$ e pertanto

$$Q - G = (Q - A) + (A - G) = -\ell(\frac{1}{4}\boldsymbol{e}_x + \frac{3}{2}\boldsymbol{e}_y).$$

Il momento di inerzia $I_{G,\boldsymbol{e}_x}$ si ottiene osservando che esso consta di tre contributi: ogni asta, grazie al teorema di Huygens-Steiner, dà un contributo pari a $m\frac{\ell^2}{4}$; i triangoli equivalgono ad un quadrato di massa $6m$ e lato $\frac{3}{\sqrt{2}}\ell$ per cui il loro contributo vale $\frac{9}{4}m\ell^2$ cosicché il momento di inerzia complessivo in questa direzione vale $\frac{11}{4}m\ell^2$. Passando al momento $I_{G,\boldsymbol{e}_y}$, si osservi che ciascuna asta contribuisce con $\frac{1}{3}m\ell^2$ mentre il contributo di ogni triangolo richiede un po' di attenzione. Concentriamoci sul triangolo di vertice A: per simmetria il contributo dell'altro triangolo è il medesimo. Sia M il centro di massa del triangolo che si trova sull'altezza relativa all'ipotenusa a distanza ℓ da A. Sia O il punto medio dell'ipotenusa. Applicando due volte il teorema di Huygens-Steiner otteniamo

$$I_{G,\boldsymbol{e}_y}(\mathcal{T}) = I_{M,\boldsymbol{e}_y}(\mathcal{T}) + \frac{27}{4}m\ell^2 \qquad \text{e} \qquad I_{O,\boldsymbol{e}_y}(\mathcal{T}) = I_{M,\boldsymbol{e}_y}(\mathcal{T}) + \frac{3}{4}m\ell^2.$$

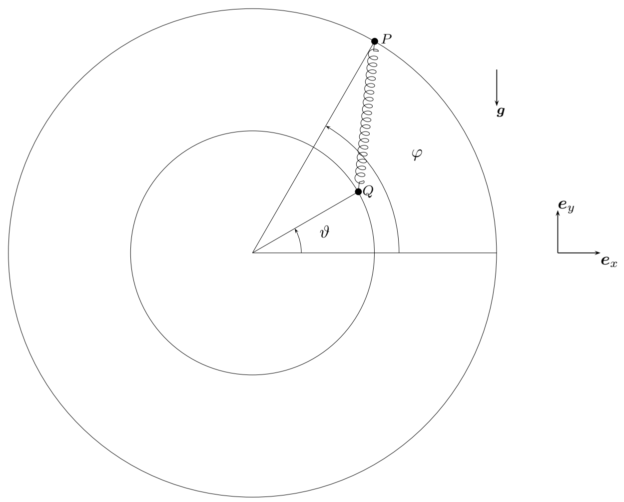
Ora, $I_{O,\boldsymbol{e}_y}(\mathcal{T})$ è la metà del momento centrale di inerzia di un quadrato di massa doppia del triangolo e lato pari ad un suo cateto, e dunque vale $\frac{9}{8}m\ell^2$. Pertanto, svolgendo i calcoli si ottiene

$$I_{G,\boldsymbol{e}_y}(\mathcal{T}) = \frac{57}{8}m\ell^2$$

ed il momento centrale di inerzia copmplessivo è

$$I_{G,\boldsymbol{e}_y} = \frac{2}{3}m\ell^2 + \frac{57}{8}m\ell^2 = \frac{187}{24}m\ell^2.$$

3. *In un piano verticale, su due circonferenze concentriche di raggio $2R$ ed R sono liberi di muoversi due punti materiali P e Q di massa, rispettivamente, $m/2$ ed m, soggetti all'azione di una forza elastica di costante $k = mg/R$. Introdotte le coordinate ϑ e φ indicate in figura, si determinino l'energia cinetica e quella potenziale del sistema e si studi la stabilità delle configurazioni di equilibrio con PQ verticale. Si determino le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile con PQ verticale.*



L'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{m}{2}R^2\dot{\vartheta}^2 + mR^2\dot{\varphi}^2.$$

Servendosi del teorema di Carnot per il calcolo dell'energia potenziale elastica otteniamo

$$V = mgR\sin\varphi + mgR\sin\vartheta + \frac{mg}{2R}[5R^2 - 4R^2\cos(\varphi - \vartheta)]$$

e le posizioni di equilibrio sono le soluzioni di

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = mgR\cos\vartheta - 2mgR\sin(\varphi - \vartheta) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi} = mgR\cos\varphi + 2mgR\sin(\varphi - \vartheta) = 0 \end{cases}$$

Sottraendo tra loro queste equazioni si vede che $\cos\vartheta = -\cos\varphi$ per cui o ϑ e φ annullano entrambe il coseno oppure deve essere $\vartheta = \varphi \pm \pi$ che però, sostituito nelle equazioni di equilibrio, mostra come ci si riconduca ancora al caso in cui sia ϑ che φ annullano il coseno. Sono possibili allora queste quattro coppie di valori (ϑ, φ) per le configurazioni di equilibrio: $E_1 \equiv (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $E_2 \equiv (\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$, $E_3 = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,$E_4 = (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$. Per deciderne la stabilità consideriamo le derivate seconde di V

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} = -mgR\sin\vartheta + 2mgR\cos(\varphi - \vartheta) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial \vartheta} = -2mgR\cos(\varphi - \vartheta) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial^2 \varphi} = -mgR\sin\varphi + 2mgR\cos(\varphi - \vartheta) \end{cases}$$

da cui si deduce che le configurazioni E_1, E_2 ed E_3 sono instabili perché le hessiane corrispondenti sono

$$B_1 = mgR \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha traccia positiva ma deteminante negativo e quindi corrisponde ad un un punto di sella di V;

$$B_2 = mgR \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

che ha sia determinante che traccia negativi e dunque corrisponde ancora ad un punto di sella per V, così come

$$B_3 = mgR \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Al contrario, la hessiana della configurazione E_4 è

$$B = mgR \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

che ha determinante e traccia positivi, cosicché i suoi autovalori sono positivi e V ha un minimo relativo isolato in E_4. Occorre dunque diagonalizzare simultaneamente B con la forma quadratica A associata all'energia cinetica

$$A = mR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

risolvendo l'equazione algebrica $\det(\lambda A - B) = 0$ che è

$$2\lambda^2 - 9\lambda\frac{g}{R} + 5\left(\frac{g}{R}\right)^2 = 0$$

le cui soluzioni sono

$$\lambda_\pm = \frac{9 \pm \sqrt{41}}{4}\frac{g}{R}$$

cui corrispondono le pulsazioni delle piccole oscillazioni $\omega_\pm = \sqrt{\lambda_\pm}$.