Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Correzione prova scritta
Esame di Fisica Matematica
9 giugno 2011

1. *Determinare, per il seguente sistema di vettori applicati,*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 3\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_1 - O \equiv (2,-1,-2), \\ \boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_2 - O \equiv (2,1,-3), \\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_3 - O \equiv (1,1,2) \end{cases}$$

1. *il risultante ed il momento risultante;*
2. *il trinomio invariante;*
3. *l'equazione dell'asse centrale;*
4. *(per gli studenti che hanno frequentato nell'anno accademico corrente) Determinare un sistema di vettori applicati, equivalente a quello proposto e formato da due vettori, di cui uno applicato in $Q \equiv (3,-2,1)$.*

Il risultante vale $\boldsymbol{R} = 6\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_z$ ed il momento risultante rispetto ad O è $\boldsymbol{M}_O = 13\boldsymbol{e}_x - 12\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z$ e dunque il trinomio invariante vale $\mathcal{I} = 82$. Per trovare l'equazione dell'asse centrale calcoliamo $\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{M}_O = 24\boldsymbol{e}_x + 14\boldsymbol{e}_y - 72\boldsymbol{e}_z$ e $|\boldsymbol{R}|^2 = 40$ per cui i punti Q dell'asse centrale sono del tipo $Q - O = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ e soddisfano l'equazione

$$\begin{cases} x = \frac{3}{5} + 6\lambda \\ \\ y = \frac{7}{20} \\ \\ z = -\frac{9}{5} + 2\lambda. \end{cases}$$

Dal teorema del trasporto ricaviamo

$$\boldsymbol{M}_Q = \boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{R} \wedge (Q - O) = 17\boldsymbol{e}_x - 12\boldsymbol{e}_y - 10\boldsymbol{e}_z.$$

Cerchiamo un sistema equivalente a quello dato che soddisfi le richieste del testo nella forma

$$\Sigma := \{(\boldsymbol{R}, Q), (-\boldsymbol{v}, Q), (\boldsymbol{v}, P)\}$$

dove

$$(P - Q) \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{M}_Q = 17\boldsymbol{e}_x - 12\boldsymbol{e}_y - 10\boldsymbol{e}_z.$$

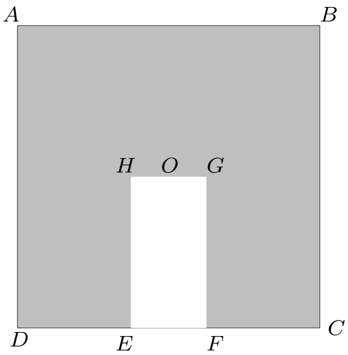
Questa equazione si può sempre soddisfare prendendo $\boldsymbol{v} = 5\boldsymbol{e}_y - 6\boldsymbol{e}_z$, cosicché $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{M}_Q = 0$, e

$$P - Q = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|^2}\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{M}_Q = \frac{1}{61}(-122\boldsymbol{e}_x - 102\boldsymbol{e}_y - 85\boldsymbol{e}_z) = -2\boldsymbol{e}_x - \frac{102}{61}\boldsymbol{e}_y - \frac{85}{61}\boldsymbol{e}_z$$

per cui

$$P - O = (P - Q) + (Q - O) = \boldsymbol{e}_x - \frac{224}{61}\boldsymbol{e}_y - \frac{24}{61}\boldsymbol{e}_z.$$

2.*Da una lamina quadrata $ABCD$ di massa $8m$ e di lato 4ℓ viene asportato un rettangolo $EFGH$ di lati $EF = \ell$, $FG = 2\ell$ disposto in modo che il centro di simmetria O di $ABCD$ sia anche punto medio di GH. All'istante $t = 0$ il corpo occupa la configurazione indicata in figura e la velocità di A è $\boldsymbol{v}_A = v_0(2\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y)$*



mentre quella di C è $\boldsymbol{v}_C = v_0(4\boldsymbol{e}_x + 5\boldsymbol{e}_y)$, dove v_0 è una velocità caratteristica.

1. Determinare la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(0)$ del corpo all'istante $t = 0$;
2. trovare la velocità $\boldsymbol{v}_O(0)$ del centro O del quadrato all'istante $t = 0$;
3. trovare analiticamente la posizione del centro di istantanea rotazione all'istante $t = 0$ rispetto al punto O;
4. determinare il momento di inerzia della lamina forata rispetto all'asse passante per O, diretto lungo $\boldsymbol{e}_x$.
5. determinare il momento centrale di inerzia della lamina forata nella direzione $\boldsymbol{e}_y$.

Scritto $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_z$ ed osservato che $C - A = 4\ell(\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y)$, abbiamo

$$\boldsymbol{v}_C - \boldsymbol{v}_A = 2v_0(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y) = 4\omega\ell(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)$$

da cui otteniamo

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{v_0}{2\ell}\boldsymbol{e}_z.$$

Utilizzando ancora la formula fondamentale della cinematica rigida ed osservando che $O - A = 2\ell(\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y)$ otteniamo

$$\boldsymbol{v}_O = v_0(3\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y).$$

Se Q indica il centro di istantanea rotazione e poniamo $Q - O = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y$, siccome deve essere $\boldsymbol{v}_Q = \boldsymbol{0}$ abbiamo

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge (Q - O)$$

e ricaviamo $x = -8\ell$ ed $y = 6\ell$.

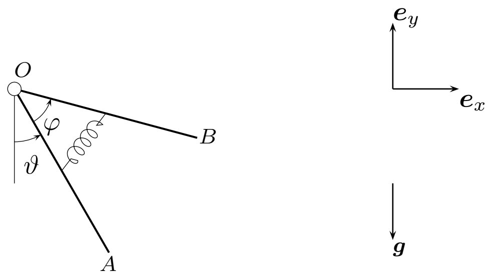
Per il calcolo del momento di inerzia $I_{O,\boldsymbol{e}_x}$ osserviamo che l'asse $\boldsymbol{e}_x$ passante per O è autovettore per il tensore centrale di inerzia del quadrato, con autovalore $\frac{32}{3}m\ell^2$ mentre, applicando il teorema di Huygens-Steiner al rettangolo asportato che ha massa m, si ottiene $\frac{4}{3}m\ell^2$ per cui il momento di inerzia per la lamina forata è

$$I_{O,\boldsymbol{e}_x} = \frac{28}{3}m\ell^2.$$

Per il calcolo del momento centrale di inerzia lungo $\boldsymbol{e}_y$ osserviamo che i centri di massa del quadrato e del rettangolo asportato giacciono sulla stessa verticale per cui il teorema di composizione permette di concludere che il momento richiesto è la differenza dei momenti centrali del quadrato e del rettangolo nella direzione $\boldsymbol{e}_y$ che valgono, rispettivamente, $\frac{32}{3}m\ell^2$ e $\frac{1}{12}m\ell^2$ per cui

$$I_{G,\boldsymbol{e}_y} = \frac{127}{12}m\ell^2.$$

3. *In un piano verticale, due aste OA ed OB di ugual massa m ed ugual lunghezza 2ℓ hanno l'estremo comune O incernierato ad un punto fisso ed hanno i centri di massa collegati tra loro da una molla di costante elastica mg/ℓ e lunghezza a riposo ℓ. Introdotte le coordinate ϑ e φ indicate in figura, determinare l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema; scrivere le equazioni di Lagrange e determinare $\ddot{\vartheta}(0)$ e $\ddot{\varphi}(0)$ se, all'istante $t = 0$, il sistema si trova in quiete nella configurazione $\vartheta(0) = \varphi(0) = \frac{\pi}{2}$.*



Le velocità angolari di OA ed OB sono, rispettivamente, $\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$ e $(\dot{\vartheta} + \dot{\varphi})\boldsymbol{e}_z$ e dunque l'energia cinetica complessiva risulta

$$T = \frac{2}{3}mR^2[\dot{\vartheta}^2 + (\dot{\vartheta} + \dot{\varphi})^2].$$

L'energia potenziale ha tre contributi: quello gravitazionale di OA, pari a $-mg\ell\cos\vartheta$; quello gravitazionale di OB, dato da $-mg\ell\cos(\vartheta + \varphi)$; il termine elastico dato da $\frac{mg}{2}\ell(2\sin\frac{\varphi}{2} - 1)^2$ dove abbiamo osservato che la lunghezza della molla è $2\ell\sin\frac{\varphi}{2}$ e che la lunghezza a riposo è ℓ. Dunque

$$V = -mg\ell\cos\vartheta - mg\ell\cos(\vartheta + \varphi) + \frac{mg}{2}\ell(2\sin\frac{\varphi}{2} - 1)^2.$$

Possiamo a questo punto scrivere le equazioni di Lagrange introducendo la lagrangiana $L = T - V$:

$$\frac{4}{3}m\ell^2[2\ddot{\vartheta} + \ddot{\varphi}] = -mg\ell[\sin\vartheta + \sin(\vartheta + \varphi)]$$

e

$$\frac{4}{3}m\ell^2(\ddot{\vartheta}+\ddot{\varphi}) = -mg\ell\sin(\vartheta+\varphi) - mg\ell(2\sin\frac{\varphi}{2}-1)\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Imponendo le condizioni iniziali del testo, abbiamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{8}{3}\ell\ddot{\vartheta}(0) + \frac{4}{3}\ell\ddot{\varphi}(0) & = -g \\ \\ \frac{4}{3}\ell[\ddot{\vartheta}(0)+\ddot{\varphi}(0)] & = -g(1-\frac{1}{\sqrt{2}}). \end{cases}$$

Per sottrazione delle due equazioni si ottiene

$$\ddot{\vartheta}(0) = -\frac{3g}{4\sqrt{2}\ell}$$

e quindi

$$\ddot{\varphi}(0) = \frac{3g}{4\ell}\left(\sqrt{2}-1\right).$$