Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Fisica Matematica (Ingegneria Civile ed Ambientale)
Appello del 25 giugno 2015

1. *Sia assegnata l'equazione*

$$\boldsymbol{x} \wedge (-3\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z) = \boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y + \beta\boldsymbol{e}_z.$$

*Trovare per quale valore del parametro β essa ammette soluzione (**1** punto). In corrispondenza, trovarne tutte le soluzioni (**3** punti)*

Imponendo l'ortogonalità dei vettori $\boldsymbol{a} = -3\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z$ e $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y + \beta\boldsymbol{e}_z$ otteniamo la condizione di risolubilità $\beta = -3$ da cui otteniamo $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y - 3\boldsymbol{e}_z$. Sostituendo questo valore nell'espressione generale $\boldsymbol{x} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} + \lambda\boldsymbol{a}$ della soluzione dell'equazione proposta otteniamo

$$\boldsymbol{x} = -\frac{1}{14}[9\boldsymbol{e}_x + 8\boldsymbol{e}_y + 11\boldsymbol{e}_z] + \lambda(-3\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z)$$

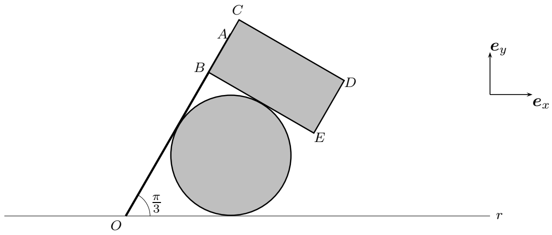
2. *Un sistema è formato da 4 corpi rigidi liberi di muoversi nello spazio, aventi ciascuno 6 punti materiali liberi di muoversi sulla propria superficie. Determinarne il numero totale di gradi di libertà.*

Un corpo rigido libero di muoversi nello spazio ha 6 gradi di libertà per cui i 4 corpi rigidi contribuiscono con 24 gradi di libertà. In tutto vi sono 24 punti materiali a ciascuno dei quali competono 2 gradi di libertà per cui il numero di gradi di libertà dei punti materiali è 48 e l'intero sistema ha 72 gradi di libertà.

3. *Un corpo rigido piano è formato da un'asta OA di lunghezza $2R\sqrt{3}$, massa $2m$, inclinata di $\frac{\pi}{3}$ sull'orizzontale; da un disco di massa $4m$, raggio R, tangente all'asta ed alla retta r orizzontale passante per O; da un rettangolo omogeneo $BCDE$ di massa $2m$, lati $BC = R$, $CD = 2R$, con il lato BC sovrapposto all'asta e BE tangente al disco nel suo punto medio. Determinare la matrice di inerzia del corpo rispetto al punto O precisando, per ogni elemento di matrice, i contributi dell'asta, del disco e del rettangolo rispetto alla base $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$.*

Il punto O è un estremo dell'asta per cui i contributi agli elementi di matrice richiesti sono:

$$I_O^{xx}(OA) = \frac{1}{3}2m12R^2\sin^2\frac{\pi}{3} = 6mR^2 \qquad I_O^{yy}(OA) = \frac{1}{3}2m12R^2\sin^2\frac{\pi}{6} = 2mR^2$$



$$I_O^{xy}(OA) = -\frac{1}{3}2m12R^2 \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3} = -2\sqrt{3}mR^2.$$

Per il disco, osserviamo anzitutto dalla geometria del problema che le coordinate del suo centro di massa G rispetto ad O sono $x = R\sqrt{3}$ ed $y = R$ per cui, grazie al teorema di Huygens-Steiner,

$$I_O^{xx}(\mathcal{D}) = \frac{1}{4}4mR^2 + 4mR^2 = 5mR^2 \qquad I_O^{yy}(\mathcal{D}) = \frac{1}{4}4mR^2 + 12mR^2 = 13mR^2$$

$$I_O^{xy}(\mathcal{D}) = -4\sqrt{3}mR^2.$$

Per il rettangolo, introduciamo una base ortonormale $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ con $\boldsymbol{e}_1 := \frac{E-B}{|E-B|}$ e $\boldsymbol{e}_2 := \frac{C-B}{|C-B|}$ positivamente orientata con $\boldsymbol{e}_z$. Rispetto alla base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_z\}$ la matrice di inerzia del rettangolo rispetto al suo centro di massa M è

$$I_M(BCDE) = \frac{m}{6}R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, per trovare le coordinate di M rispetto ad O scriviamo

$$M - O = G - O + M - G$$

ed osserviamo che $G - O = R(\sqrt{3}\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)$ e che, per la geometria del problema, $M - G = \frac{3}{2}R\boldsymbol{e}_2$. Siccome

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_x - \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_y \qquad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_y$$

concludiamo che

$$M - O = \frac{R}{4}(4\sqrt{3} + 3)\boldsymbol{e}_x + \frac{R}{4}(4 + 3\sqrt{3})\boldsymbol{e}_y.$$

Servendoci del teorema di Huygens-Steiner ed osservando che

$$\boldsymbol{e}_x = \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2 \qquad \boldsymbol{e}_y = -\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_2$$

otteniamo

$$I_O^{xx}(BCDE) = \frac{m}{6}R^2 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{m}{8}R^2(4 + 3\sqrt{3})^2$$

ovvero

$$I_O^{xx}(BCDE) = mR^2\left(\frac{17}{3} + 3\sqrt{3}\right).$$

Similmente

$$I_O^{yy}(BCDE) = \frac{m}{6}R^2\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{m}{8}R^2(4\sqrt{3}+3)^2$$

da cui otteniamo

$$I_O^{yy}(BCDE) = mR^2\left(\frac{23}{3} + 3\sqrt{3}\right).$$

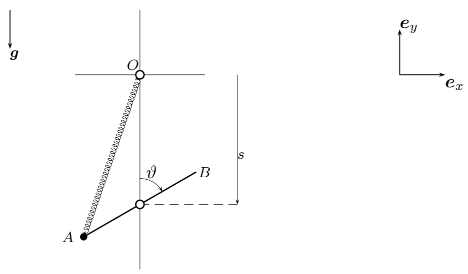
Infine

$$I_O^{xy}(BCDE) = \frac{m}{6}R^2\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{m}{8}R^2(4\sqrt{3}+3)(4+3\sqrt{3})$$

cioè

$$I_O^{xy}(BCDE) = -3mR^2(2+\sqrt{3}).$$

*In un piano verticale, un'asta omogenea AB di massa $3m$ e lunghezza 2ℓ è libera di ruotare attorno al proprio punto medio, mobile a sua volta su una guida verticale. All'estremo A è saldato un punto materiale di massa m, attratto verso un punto fisso O della guida da una molla ideale di costante elastica $2mg/\ell$. Introdotte le coordinate s e ϑ indicate in figura, determinare l'energia cinetica del sistema (**4** punti) e l'energia potenziale (**3** punti). Trovare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità (**3** punti). Qualificare i modi normali di oscillazione attorno alla posizione di equilibrio stabile (**4** punti).*



Il contributo dell'asta all'energia cinetica si calcola ricorrendo al teorema di König, osservando che l'asta ruota con velocità angolare $-\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$ e che il centro di massa ha velocità $-\dot{s}\boldsymbol{e}_y$. Pertanto

$$T_{AB} = \frac{3}{2}m\dot{s}^2 + \frac{m}{2}\ell^2\dot{\vartheta}^2.$$

Quanto al contributo del punto saldato in A, introduciamo la base ortonormale $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_z\}$ solidale all'asta con $\boldsymbol{e}_1 := \frac{A-B}{|A-B|}$ e $\boldsymbol{e}_2$ tale che $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_z$. Allora

$$A - O = -s\boldsymbol{e}_y + \ell \boldsymbol{e}_1$$

e dunque, grazie alle formule di Poisson,

$$\boldsymbol{v}_A = -\dot{s}\boldsymbol{e}_y - \ell\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_2$$

per cui il contributo del punto all'energia cinetica è

$$T_A = \frac{m}{2}(\dot{s}^2 + \ell^2\dot{\vartheta}^2 - 2\ell\dot{s}\dot{\vartheta}\sin\vartheta)$$

dove abbiamo notato che $\boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) = -\sin\vartheta$. In definitiva l'energia cinetica è data da

$$T = 2m\dot{s}^2 + m\ell^2\dot{\vartheta}^2 - m\ell\dot{s}\dot{\vartheta}\sin\vartheta.$$

I contributi dell'energia potenziale sono quelli della forza peso e della forza elastica. Servendosi del teorema di Carnot per il calcolo della lunghezza di OA, otteniamo

$$V = -4mgs - mg\ell\cos\vartheta + \frac{mg}{\ell}s^2 + 2mgs\cos\vartheta.$$

Le configurazioni di equilibrio ordinarie risolvono il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial s} = -4mg + 2mg\cos\vartheta + \frac{2mg}{\ell}s = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = mg(\ell - 2s)\sin\vartheta = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione ammette le soluzioni $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$ oppure $s = \frac{\ell}{2}$. Sostituendo nella prima equazione si ricavano i valori all'equilibrio della restante variabile che sono, rispettivamente

$$s = \ell \qquad s = 3\ell \qquad \cos\vartheta = \frac{3}{2}.$$

L'ultimo valore è chiaramente privo di senso per cui le coppie (s, ϑ) all'equilibrio sono

$$E_1 = (\ell, 0) \qquad E_2 = (3\ell, \pi).$$

Per studiarne la stabilità, calcoliamo le derivate seconde di V, ottenendo

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = \frac{2mg}{\ell} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial s \partial \vartheta} = -2mg\sin\vartheta \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} = mg(\ell - 2s)\cos\vartheta$$

per cui le matrici hessiane sono

$$B(E_1) = mg\begin{pmatrix} \frac{2}{\ell} & 0 \\ 0 & -\ell \end{pmatrix} \qquad\qquad B(E_1) = mg\begin{pmatrix} \frac{2}{\ell} & 0 \\ 0 & 5\ell \end{pmatrix}:$$

si vede che, mentre la configurazione E_1 corrisponde ad un punto di sella di V ed è dunque instabile, per il primo criterio di Ljapunov, E_2 corrisponde ad un punto di minimo relativo isolato per V e dunque è stabile in virtù del teorema di Dirichlet-Lagrange. Studieremo dunque questa configurazione e d'ora in poi indicheremo $B(E_2)$ semplicemente con B. La forma quadratica associata all'energia cinetica in E_2 è

$$A = m \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2\ell^2 \end{pmatrix}.$$

Per trovare le pulsazionu delle piccole oscillazioni, risolviamo l'equazione

$$\det(\lambda A - B) = m\det \begin{pmatrix} 4\lambda - 2\frac{g}{\ell} & 0 \\ 0 & 2\lambda\ell^2 - 5g\ell \end{pmatrix} = 0$$

da cui otteniamo

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\frac{g}{2\ell}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\frac{5g}{2\ell}}.$$

Per qualificare i modi normali, risolviamo le equazioni

$$\det(\lambda_1 A - B)\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0} \qquad \det(\lambda_2 A - B)\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$$

che hanno come soluzioni

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto i modi normali corrispondenti sono caratterizzati da

$$\begin{cases} s(t) = 3\ell + \varepsilon c_1(t) \\ \vartheta(t) = \pi \end{cases},$$

con $c_1(t) = \alpha_1 \cos(\omega_1 t) + \beta_1 \sin(\omega_1 t)$ e da

$$\begin{cases} s(t) = 3\ell \\ \vartheta(t) = \pi + \varepsilon c_2(t) \end{cases},$$

con $c_2(t) = \alpha_2 \cos(\omega_2 t) + \beta_2 \sin(\omega_2 t)$, essendo α_1, β_1, α_2 e β_2 costanti di integrazione.