Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Fisica Matematica (Ingegneria Industriale)
Appello del 22 febbraio 2021

1. *Assegnato il sistema di vettori applicati:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 3\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_1 - O \equiv (4, 2, -1), \\ \boldsymbol{v}_2 = 4\boldsymbol{e}_x - 3\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_2 - O \equiv (1, 3, 2), \\ \boldsymbol{v}_3 = -2\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y + 4\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_3 - O \equiv (-2, 1, 3) \end{cases}$$

*determinarne il risultante (**1** punto); il momento risultante rispetto ad O (**3** punti); determinare un sistema, equivalente a quello assegnato, formato da due vettori, di cui uno applicato nel punto $Q - O \equiv (2, -4, -1)$ (**3** punti).*

Il risultante è $\boldsymbol{R} = 5\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z$ ed il momento risultante rispetto al polo O è $\boldsymbol{M}_O = 9\boldsymbol{e}_x + 16\boldsymbol{e}_y - 5\boldsymbol{e}_z$. Per calcolare il momento rispetto a Q serviamoci del teorema del trasporto

$$\boldsymbol{M}_Q = \boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{R} \wedge (Q - O) = \boldsymbol{M}_O + 5\boldsymbol{e}_x + 7\boldsymbol{e}_x - 18\boldsymbol{e}_z = 14\boldsymbol{e}_x + 23\boldsymbol{e}_y - 23\boldsymbol{e}_z\,.$$

Per trovare un sistema equivalente che soddisfi le condizioni del testo, applichiamo un vettore pari ad $\boldsymbol{R}$ nel punto Q ed aggiungiamo una coppia $\{P, \boldsymbol{v}\}$, $\{Q, -\boldsymbol{v}\}$ il cui momento rispetto a Q, $(P - Q) \wedge \boldsymbol{v}$ deve essere uguale ad $\boldsymbol{M}_Q$. Perché ciò sia possibile occorre che $\boldsymbol{v}$ sia ortogonale ad $\boldsymbol{M}_Q$; prenderemo il vettore $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z$ cosicché $(P - Q)$ è una soluzione dell'equazione

$$(P - Q) \wedge (\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z) = 14\boldsymbol{e}_x + 23\boldsymbol{e}_y - 23\boldsymbol{e}_z :$$

ad esempio

$$P - Q = -23\boldsymbol{e}_x + 7\boldsymbol{e}_y - 7\boldsymbol{e}_z$$

da cui segue

$$P - O = (P - Q) + (Q - O) = -21\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y - 8\boldsymbol{e}_z.$$

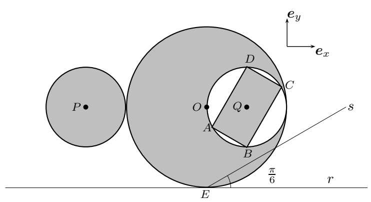
Il sistema ricercato è composto dai vettori

$$\boldsymbol{R} - \boldsymbol{v} = 5\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y \qquad \text{applicato in } Q - O = 2\boldsymbol{e}_x - 4\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z$$

e

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z \qquad \text{applicato in } P - O = -21\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y - 8\boldsymbol{e}_z.$$

2. *Da un disco di centro O, raggio $2R$ e massa $2m$, appoggiato ad una guida orizzontale r, viene asportato un disco di raggio R, tangente internamente al* *precedente e di centro Q alla stessa quota di O. Il disco asportato viene ricollocato in modo da essere tangente esternamente alla circonferenza del disco originario, con il centro P alla stessa quota di O, mentre un rettangolo $ABCD$ di massa $4m$ e lati $CB = \sqrt{3}R$ e $CD = R$ viene inscritto nel disco liberato dal disco asportato, con CB inclinato di $\frac{\pi}{3}$ rispetto all'orizzontale. Determinare per il disco forato, per il disco di centro P e per il rettangolo il momento di inerzia rispetto alla retta s inclinata di $\frac{\pi}{6}$ sull'orizzontale, passante per il punto E di contatto tra r ed il disco di centro O (**12** punti).*



Fissato un riferimento csrtesiano con origine in E, l'equazione della retta s è

$$x - \sqrt{3}y = 0\,.$$

Per calcolare il contributo del disco forato, procuriamoci la massa M del disco asportato, che soddisfa la proporzione

$$\frac{M}{2m} = \frac{\pi R^2}{4\pi R^2}\,, \qquad \text{per cui} \qquad M = \frac{m}{2}\,.$$

Le coordinate rispetto ad E dei centri di massa O e Q del disco pieno originario e di quello asportato sono $O \equiv (0, 2R)$ e $Q \equiv (R, 2R)$. Il momento di inerzia del disco forato è la differenza di quello del disco pieno e di quello del disco asportato e ciascuno di essi si calcola applicando il teorema di Huygens-Steiner. Avremo allora

$$I_s(\text{disco forato}) = \left[\frac{2m}{4}4R^2 + 2md_1^2\right] - \left[\frac{m}{8}R^2 + \frac{m}{2}d_2^2\right]$$

dove d_1 e d_2 sono le distanze di O e Q da s e valgono

$$d_1 = \frac{|-2\sqrt{3}R|}{2} = R\sqrt{3} \qquad d_2 = \frac{|R - 2\sqrt{3}R|}{2} = R\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$$

per cui

$$I_s(\text{disco forato}) = \left[2mR^2 + 6mR^2\right] - \left[\frac{m}{8}R^2 + \frac{m}{8}(13 - 4\sqrt{3})\right] = \left[\frac{25}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right] mR^2$$

Il disco di centro P ha anch'esso massa $\frac{m}{2}$ e le coordinate del centro rispetto ad E sono $P \equiv (-3R, 2R)$ per cui

$$I_s = \frac{m}{8}R^2 + \frac{m}{2}h^2$$

dove la distanza h di P da s è

$$h = \frac{|-3R - 2\sqrt{3}R|}{2} = \frac{3+2\sqrt{3}}{2}R$$

per cui

$$I_s = \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8}(21 + 12\sqrt{3})\right] mR^2 = \left[\frac{11}{4} + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right] .$$

Per il rettangolo $ABCD$, osserviamo che il suo centro di massa coincide con il centro Q del disco asportato ed indichiamo con $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$ i versori associati ai vettori $C - B$ e $A - B$, rispettivamente. Sulla base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ la matrice centrale di inerzia del rettangolo è

$$\mathbb{I}_Q = \frac{4mR^2}{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Se $\boldsymbol{n}$ è il versore associato ad s, che forma un angolo di $\frac{\pi}{6}$ con il lato BC, avremo

$$\boldsymbol{n} = \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2 ,$$

e quindi

$$I_{Q,\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n} \cdot \mathbb{I}_Q \boldsymbol{n} = \frac{m}{2}R^2.$$

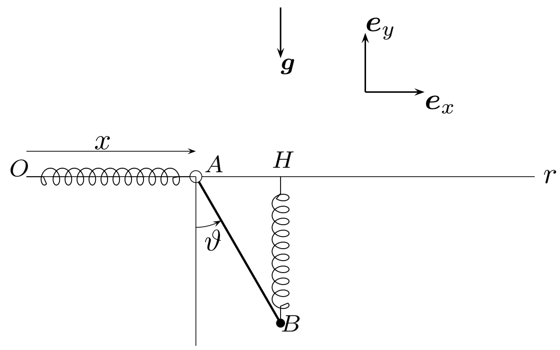
La distanza da s del centro di massa del rettangolo è ancora d_2 trovata in precedenza, per cui il contributo del rettangolo al momento di inerzia cercato è

$$I_r = \frac{m}{2}R^2 + 4mR^2\left[\frac{13 - 4\sqrt{3}}{4}\right] = \left[\frac{27}{2} - 2\sqrt{3}\right] mR^2 .$$

3._In un piano verticale, un'asta AB di lunghezza 2ℓ e massa $2m$ ha l'estremo A mobile lungo una guida fissa orizzontale r ed è libera di ruotare attorno ad A, a sua volta attratto verso un punto fisso O di r da una molla di costante elastica $3\frac{mg}{\ell}$ e lunghezza a riposo 2ℓ. Nell'estremo B è saldato un punto materiale di massa m attratto da una molla ideale di costante elastica $\delta\frac{mg}{\ell}$ verso un punto H di massa nulla, mobile su r in modo da essere sempre sulla verticale di B. Introdotte le coordinate x e ϑ indicate in figura, determinare l'energia cinetica (**3** punti) e l'energia potenziale del sistema (**2** punti). Studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio al variare di $\delta > 0$ (**6** punti)._

Sia G il centro di massa dell'asta. L'energia cinetica del sistema si scrive come

$$T = mv_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{I}_G \boldsymbol{\omega} + \frac{m}{2}v_B^2$$



che, essendo $\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$, diventa

$$T = mv_G^2 + \frac{2}{24}4\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{m}{2}v_B^2 = mv_G^2 + \frac{1}{3}\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{m}{2}v_B^2\,.$$

Per procedere, introduciamo i versori $\boldsymbol{e}_1 = \frac{B-A}{|B-A|}$ ed $\boldsymbol{e}_2$, ortogonale all'asta, in modo che $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ ed $\boldsymbol{e}_z$ formino un base ortonormale positivamente orientata. Avremo allora

$$G - O = x\boldsymbol{e}_x + \ell\boldsymbol{e}_1 \qquad \text{e quindi} \qquad \boldsymbol{v}_G = \dot{x}\boldsymbol{e}_x + \ell\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_2$$

e

$$G - O = x\boldsymbol{e}_x + 2\ell\boldsymbol{e}_1 \qquad \text{e quindi} \qquad \boldsymbol{v}_M = \dot{x}\boldsymbol{e}_x + 2\ell\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_2$$

per cui, sviluppando i quadrati,

$$v_G^2 = \dot{x}^2 + \ell^2\dot{\vartheta}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta$$

e

$$v_M^2 = \dot{x}^2 + 4\ell^2\dot{\vartheta}^2 + 4\ell\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta$$

per cui l'energia cinetica complessiva è

$$T = \frac{3}{2}m\dot{x}^2 + \frac{10}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + 4m\ell\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta\,.$$

Presa come quota di riferimento quella della retta r, l'energia potenziale gravitazionale complessiva è $-4mg\ell\cos\vartheta$ mentre i contributi delle due molle OA e BH sono, rispettivamente $\frac{3mg}{2\ell}(x-2\ell)^2$ e $2\delta mg\ell\cos^2\vartheta$ per cui l'energia potenziale complessiva è

$$V = -4mg\ell\cos\vartheta + \frac{3mg}{2\ell}(x-2\ell)^2 + 2\delta mg\ell\cos^2\vartheta\,.$$

Le configurazioni di equilibrio ordinarie si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = 3\frac{mg}{\ell}(x-2\ell) = 0 \\[2ex] \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = 4mg\ell\sin\vartheta - 4mg\ell\delta\cos\vartheta\sin\vartheta = 4mg\ell\sin\vartheta(1-\delta\cos\vartheta) = 0 \end{cases}$$

e sono rappresentate dalle coppie di coordinate (x, ϑ)

$$E_1 \equiv (2\ell, 0) \qquad E_2 \equiv (2\ell, \pi),$$

che esistono quale che sia il valore positivo di δ e dalle coppie

$$E_3 \equiv (2\ell, \vartheta^*) \qquad E_4 \equiv (2\ell, 2\pi - \vartheta^*),$$

dove ϑ^* è l'unico valore di $\vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tale che

$$\cos \vartheta^* = \frac{1}{\delta} :$$

pertanto le configurazioni E_3 ed E_4 esistono purché sia

$$\delta \geq 1.$$

Per determinarne la stabilità, consideriamo le corrispondenti matrici hessiane, costruite a partire dalle derivate seconde

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 3\frac{mg}{\ell} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \vartheta} = 0 \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} = 4mg\ell[\cos\vartheta - \delta(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)] :$$

$$B(E_1) = \begin{pmatrix} 3\frac{mg}{\ell} & 0 \\ 0 & 4mg\ell(1-\delta) \end{pmatrix}$$

che è definita positiva solo quando $1 - \delta > 0$, cioè quando $0 < \delta < 1$ regime nel quale E_1 è stabile nel senso di Ljapunov, mentre sarà instabile se $\delta > 1$.

$$B(E_2) = \begin{pmatrix} 3\frac{mg}{\ell} & 0 \\ 0 & -4mg\ell(1+\delta) \end{pmatrix}$$

che ha autovalori di segno discorde e quindi è instabile nel sendo di Ljapunov.

$$B(E_3) = B(E_4) = \begin{pmatrix} 3\frac{mg}{\ell} & 0 \\ 0 & 4mg\ell\left(\delta - \frac{1}{\delta}\right) \end{pmatrix}$$

che è definita positiva solo quando $\delta - \frac{1}{\delta} > 0$, cioè quando $\delta > 1$. Dunque E_3 ed E_4 sono stabili, quando esistono.