Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Fisica Matematica (Ingegneria Industriale)
Appello del 22 febbraio 2021 (secondo turno)

1. *Assegnato il sistema di vettori applicati:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_x + 5\boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (1, -2, -3), \\ \boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (2, 2, -4), \\ \boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{e}_x - 3\boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (2, 1, -1) \end{cases}$$

*determinarne il risultante (**1** punto); il momento risultante rispetto ad O (**3** punti); determinare un sistema, equivalente a quello assegnato, formato da due vettori, di cui uno applicato nel punto $Q - O \equiv (1, 1, -3)$ (**3** punti).*

Il riusltante è $\boldsymbol{R} = 2\boldsymbol{e}_x + 5\boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z$ ed il momento risultante rispetto al polo O è $\boldsymbol{M}_O = 20\boldsymbol{e}_x - 4\boldsymbol{e}_y + 7\boldsymbol{e}_z$. Per calcolare il momento rispetto a Q serviamoci del teorema del trasporto

$$\boldsymbol{M}_Q = \boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{R} \wedge (Q - O) = \boldsymbol{M}_O - 18\boldsymbol{e}_x + 9\boldsymbol{e}_x - 3\boldsymbol{e}_z = 2\boldsymbol{e}_x + 5\boldsymbol{e}_y + 4\boldsymbol{e}_z\,.$$

Per trovare un sistema equivalente che soddisfi le condizioni del testo, applichiamo un vettore pari ad $\boldsymbol{R}$ nel punto Q ed aggiungiamo una coppia $\{P, \boldsymbol{v}\}$, $\{Q, -\boldsymbol{v}\}$ il cui momento rispetto a Q, $(P - Q) \wedge \boldsymbol{v}$ deve essere uguale ad $\boldsymbol{M}_Q$. Perché ciò sia possibile occorre che $\boldsymbol{v}$ sia ortogonale ad $\boldsymbol{M}_Q$; prenderemo il vettore $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_z$ cosicché $(P - Q)$ è una soluzione dell'equazione

$$(P - Q) \wedge (2\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_z) = 2\boldsymbol{e}_x + 5\boldsymbol{e}_y + 4\boldsymbol{e}_z\,:$$

per esempio

$$P - Q = \boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z$$

da cui segue

$$P - O = (P - Q) + (Q - O) = 2\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z.$$

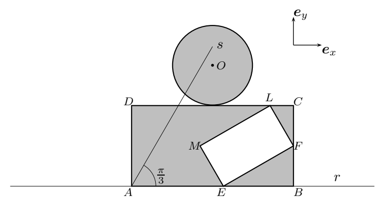
Il sistema ricercato è composto dai vettori

$$\boldsymbol{R} - \boldsymbol{v} = 5\boldsymbol{e}_y + 4\boldsymbol{e}_z \qquad \text{applicato in } Q - O = \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y - 3\boldsymbol{e}_z$$

e

$$\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_z \qquad \text{applicato in } P - O = 2\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z.$$

2. *Da un rettangolo omogeneo $ABCD$ di massa $2m$, appoggiato ad una guida orizzontale r, di lati $AB = 4\ell$ e $BC = 2\ell$ viene asportato un rettangolo $EFLM$*



*di lati $EF = 2\ell$ ed $FL = \frac{2\ell}{\sqrt{3}}$, con i vertici E, F, L sui lati del primo rettangolo e $DF = \ell$. Tangente al punto medio di DC è un disco di raggio ℓ e massa $3m$. Determinare per il rettangolo forato e per il disco di centro il momento di inerzia rispetto alla retta s inclinata di $\frac{\pi}{3}$ sull'orizzontale, passante per il punto A (**10** punti).*

La geometria del problema permette di concludere che EF è inclinato di $\frac{\pi}{6}$ rispetto ad r. Inoltre, la massa M del rettangolo asportato si ottiene dalla proporzione

$$M : 2m = \frac{4}{\sqrt{3}}\ell^2 : 8\ell^2$$

e vale $M = \frac{m}{\sqrt{3}}$. Fissato un riferimento csrtesiano con origine in A, l'equazione della retta s è

$$\sqrt{3}x - y = 0\,.$$

Per calcolare il contributo del rettangolo forato, osserviamo che le coordinate lungo $\boldsymbol{e}_x$ ed $\boldsymbol{e}_y$ rispetto ad A del centro di massa G del rettangolo pieno sono $(2\ell, \ell)$; se $\boldsymbol{n}$ è il versore associato ad s, avremo

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_y$$

ed il contributo del rettangolo pieno al momento di inerzia rispetto alla retta s è

$$I_s = \boldsymbol{n} \cdot \mathbb{I}_G \boldsymbol{n} + 2md^2$$

Sulla base $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$ la matrice centrale di inerzia del rettangolo è

$$\mathbb{I}_G = \frac{2m\ell^2}{12}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

mentre

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$I_{G,\boldsymbol{n}} = \frac{13m}{6}\ell^2.$$

La distanza da s di G è

$$d = \frac{|2\sqrt{3} - 1|\ell}{2}$$

per cui

$$I_s(ABCD) = \frac{13m}{6}\ell^2 + \frac{(13-4\sqrt{3})m\ell^2}{2} = m\ell^2\left[\frac{26}{3} - 2\sqrt{3}\right].$$

Il contributo del rettangolo asportato si calcola in modo analogo, con la differenza che ora la matrice centrale di inerzia è diagonale lungo le direzioni $\boldsymbol{e}_1$, associata a $F - E$ ed $\boldsymbol{e}_2$, associata a $L - F$. In questa base si ha, detto Q il centro di massa di $EFLM$,

$$\mathbb{I}_Q = \frac{m\ell^2}{12\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ed il versore $\boldsymbol{n}$ sulla nuova base ha lo sviluppo

$$\boldsymbol{n} = \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2$$

per cui

$$I_{Q,\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n}\cdot\mathbb{I}_Q\boldsymbol{n} = \frac{m\ell^2}{6\sqrt{3}}.$$

Per il contributo ad I_s dobbiamo applicare il teorema di Huygens-Steiner

$$I_s(EFLM) = \frac{m\ell^2}{6\sqrt{3}} + \frac{m}{\sqrt{3}}h^2$$

dove h è la distanza di Q da A. Siccome

$$Q - A = [4-\sqrt{3}]\ell\boldsymbol{e}_x + \ell\boldsymbol{e}_1 + \frac{\ell}{\sqrt{3}}\boldsymbol{e}_2$$

abbiamo

$$x_Q = (Q - A)\cdot\boldsymbol{e}_x = [4-\sqrt{3}]\ell + \frac{\sqrt{3}}{2}\ell - \frac{1}{2\sqrt{3}}\ell = \left[4 - 2\frac{\sqrt{3}}{3}\right]\ell$$

e

$$y_Q = (Q - A)\cdot\boldsymbol{e}_y = \frac{1}{2}\ell + \frac{1}{2}\ell = \ell$$

che, sostituite nell'equazione della retta s forniscono

$$h = \frac{|4\sqrt{3} - 2 - 1|\ell}{2} = \frac{4\sqrt{3} - 3}{2}\ell$$

per cui

$$I_s(EFLM) = \frac{m\ell^2}{6\sqrt{3}} + \frac{57 - 24\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}m\ell^2 = \frac{m\ell^2}{2\sqrt{3}}\left[\frac{173}{6} - 12\sqrt{3}\right]$$

ed il rettangolo forato ha momento di inerzia rispetto ad s

$$I_s = m\ell^2 \left[\frac{44}{9} - \frac{245\sqrt{3}}{36} \right] .$$

Infine, il centro di massa O del disco ha coordinate $O \equiv (2\ell, 3\ell)$ nella base $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$ centrata in A ed il suo contributo al momento di inerzia rispetto ad s è

$$I_s = \frac{3m}{4}\ell^2 + 3m\lambda^2$$

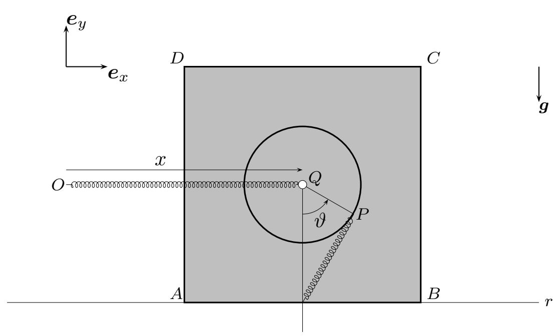
dove la distanza λ di O da s è

$$\lambda = \frac{|2\sqrt{3} - 3|\ell}{2} = \frac{(2\sqrt{3} - 3)\ell}{2}$$

per cui

$$I_s = \frac{3m}{4}\ell^2 + \frac{3m}{4}(21 - 12\sqrt{3})\ell^2 = \left[\frac{33}{2} - 9\sqrt{3} \right] m\ell^2 .$$

3. *In un piano verticale, una lamina quadrata di lato $AB = 4\ell$ e massa $3m$ trasla senza attrito lungo una guida orizzontale r. Nel centro Q della lamina è incernierato un disco di raggio ℓ e massa m che ha un punto P della circonferenza attratto verso il punto medio di AB da una molla ideale di costante elastica $2\frac{mg}{\ell}$ mentre Q è attratto verso il punto fisso O, posto alla stessa quota, da un'altra molla ideale, di costante elastica $4\frac{mg}{\ell}$ Introdotte le coordinate x e ϑ*



*indicate in figura, determinare l'energia cinetica (**2** punti) e l'energia potenziale del sistema (**2** punti). Qualificare i modi normali di oscillazione in un intorno della configurazione di equilibrio stabile (**7** punti).*

L'energia cinetica della lamina si riduce a $\frac{3m}{2}\dot{x}^2$ dal momento che la velocità angolare è nulla. Il contributo del disco è invece

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{I}_Q \boldsymbol{\omega}$$

che, essendo $\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$, diventa

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2\frac{m}{2}\ell^2 = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{4}m\ell^2\dot{\vartheta}^2;$$

pertanto l'energia cinetica complessiva è

$$T = 2m\dot{x}^2 + \frac{1}{4}m\ell^2\dot{\vartheta}^2\,.$$

L'energia potenziale gravitazionale è costante dal momento che la quota del centro di massa Q della lamina e del disco è costante per cui possiamo limitare l'attenzione all'energia potenziale elastica. Il contributo dovuto alla molla QO è $\frac{2mg}{\ell}x^2$ mentre quello della molla agente su P si può ricavare applicando il teorema del coseno al triangolo QPM, dove M è il punto medio di AB. Abbiamo

$$|P - M|^2 = 4\ell^2 + \ell^2 - 4\ell^2\cos\vartheta$$

e quindi l'energia potenziale complessiva è

$$V = \frac{2mg}{\ell}x^2 + mg\ell[5 - 4\cos\vartheta].$$

Le configurazioni di equilibrio ordinarie si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = 4\frac{mg}{\ell}x = 0 \\ \\ \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = 4mg\ell\sin\vartheta = 0 \end{cases}$$

e sono rappresentate dalle coppie di coordinate (x, ϑ)

$$E_1 \equiv (0,0) \qquad E_2 \equiv (0,\pi)\,.$$

Per determinarne la stabilità, consideriamo le corrispondenti matrici hessiane, costruite a partire dalle derivate seconde

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 4\frac{mg}{\ell} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \vartheta} = 0 \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} = 4mg\ell\cos\vartheta :$$

$$B(E_1) = \begin{pmatrix} 4\frac{mg}{\ell} & 0 \\ 0 & 4mg\ell \end{pmatrix}$$

che è definita positiva, cosicché E_1 è stabile nel senso di Ljapunov, e

$$B(E_2) = \begin{pmatrix} 4\frac{mg}{\ell} & 0 \\ 0 & -4mg\ell \end{pmatrix}$$

che ha autovalori di segno discorde e quindi è instabile nel sendo di Ljapunov.

Per qualificare i modi normali, ricaviamo la forna quadratica associata all'energia cinetica nella configurazione stabile E_1:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}^2} = 4m \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x} \partial \dot{\vartheta}} = 0 \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\vartheta}^2} = \frac{m}{2}\ell^2$$

per cui

$$A(E_1) = \begin{pmatrix} 4m & 0 \\ 0 & \frac{m}{2}\ell^2 \end{pmatrix};$$

iniziamo a trovare le soluzioni λ dell'equazione algebrica $= 0$

$$\det(\lambda A - B) = \det = \begin{pmatrix} 4m\lambda - 4\frac{mg}{\ell} & 0 \\ 0 & \frac{m}{2}\ell^2\lambda - 4mg\ell \end{pmatrix} = 0$$

che sono

$$\lambda_1 = \frac{g}{\ell} \qquad \text{e} \qquad \lambda_2 = \frac{8g}{\ell}$$

da cui si ottengono le pulsazioni delle piccole oscillazioni

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad \text{e} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{8g}{\ell}}.$$

Introduciamo

$$\boldsymbol{q}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \vartheta(t) \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{q}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cosicché il più generale moto approssimato in un intorno di E_1 si scrive come

$$\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}^0 + \varepsilon[c_1(t)\boldsymbol{v}_1 + c_2(t)\boldsymbol{v}_2]$$

dove le funzioni $c_1(t)$ e $c_2(t)$ sono date da

$$c_1(t) = \alpha_1 \cos\omega_1 t + \beta_1 \sin\omega_1 t \qquad \text{e} \qquad c_2(t) = \alpha_2 \cos\omega_2 t + \beta_2 \sin\omega_2 t,$$

con $\alpha_{1,2}$ e $\beta_{1,2}$ costanti di integrazione. Per trovare i vettori costanti $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ occorre risolvere le equazioni

$$(\lambda_1 A - B_1)\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0} \qquad \text{e} \qquad (\lambda_2 A - B_2)\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}. \tag{1}$$

Posto

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1\vartheta} \end{pmatrix}$$

ed inserito in $(1)_1$ il valore di λ_1, otteniamo il sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2}mg\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1s} \\ v_{1\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che ha soluzioni del tipo $v_{1\vartheta} = 0$ mentre non vi sono restrizioni sui valori di v_{1x}. Similmente, Posto

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2\vartheta} \end{pmatrix}$$

ed inserito in $(1)_2$ il valore di λ_2 trovato in precedenza si ricava il sistema

$$\begin{pmatrix} \frac{28g}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che è risolto dai vettori aventi $v_{2x} = 0$, mentre $v_{2\vartheta}$ è completamente libero. Possiamo allora prendere

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e concludere che i modi normali corrispondenti a λ_1 e λ_2 sono

$$x(t) = \varepsilon c_1(t) \qquad \vartheta(t) = 0$$

e

$$x(t) = 0 \qquad \vartheta(t) = \varepsilon c_2(t) :$$

nel primo modo normale, solo la lamina oscilla mentre il disco resta fisso con P sulla verticale di Q mentre nel secondo modo normale è il disco ad oscillare e la lamina resta ferma.