Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Fisica Matematica (Ingegneria Industriale)
Appello del 24 settembre 2021

1. *Determinare, per il seguente sistema di vettori applicati,*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{e}_x - 3\boldsymbol{e}_y + 4\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_1 - O \equiv (2,1,-3), \\ \boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_2 - O \equiv (1,2,-1), \\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_3 - O \equiv (2,1,-2) \end{cases}$$

*il risultante (**1** punto), il momento risultante (**3** punti), il trinomio invariante (**1** punto) e l'equazione dell'asse centrale (**2** punti).*

Il riusltante è $\boldsymbol{R} = 2\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y + 5\boldsymbol{e}_z$ ed il momento risultante rispetto al polo O è $\boldsymbol{M}_O = -\boldsymbol{e}_x - 14\boldsymbol{e}_y - 7\boldsymbol{e}_z$, per cui il trinomio invariante è dato da $\mathcal{I} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{M}_O = -9$. Per trovare l'equazione dell'asse centrale osserviamo che $|\boldsymbol{R}|^2 = 33$ e che $\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{M}_O = 84\boldsymbol{e}_x + 9\boldsymbol{e}_y - 30\boldsymbol{e}_z$. Pertanto i punti Q dell'asse centrale hanno le componenti del vettore posizione $Q - O = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ date da

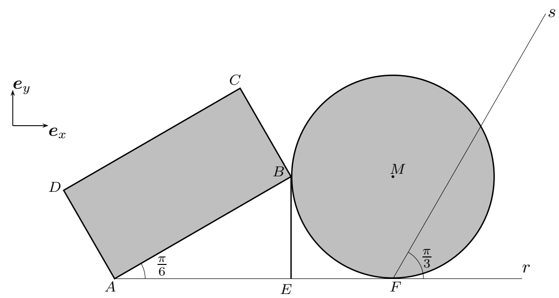
$$\begin{cases} x = \frac{28}{11} + 2\lambda \\ \\ y = \frac{3}{11} - 2\lambda \\ \\ z = -\frac{10}{11} + 5\lambda \end{cases}$$

dove λ è un numero reale.

2. *Un corpo rigido è formato da un rettangolo $ABCD$ di massa m e lati $AB = 4\ell$ e $BC = 2\ell$; il vertice A è appoggiato su una retta orizzontale r ed AB è inclinato di $\frac{\pi}{6}$ rispetto ad r; da un'asta verticale BE di massa $2m$ e lunghezza 2ℓ; da un disco di massa $3m$ e raggio 2ℓ passante per B e tangente ad r. All'istante $t = 0$, la velocità del punto F di contatto tra r ed il disco è $\boldsymbol{v}_F = 2v_0(3\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y)$ e quella di B è $\boldsymbol{v}_B = 2v_0(2\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)$. Determinare, all'istante $t = 0$, la velocità angolare (**1** punto); la velocità del vertice A del rettangolo (**1** punto); la posizione del centro di istantanea rotazione rispetto ad F (**2** punti). Determinare il momento di inerzia di ciascuno dei tre corpi descritti rispetto alla retta passante F, inclinata di $\frac{\pi}{3}$ rispetto ad r (**8** punti).*

La velocità angolare è $\boldsymbol{\omega}(0) = \omega\boldsymbol{e}_z$ e, dalla formula fondamentale della cinematica rigida, ricaviamo

$$\boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_F = \omega\boldsymbol{e}_z \wedge (B - F);$$



siccome $B - F = 2\ell(-ex + \boldsymbol{e}_y)$, inserendo i dati del problema possiamo trasformare l'equazione in

$$-2v_0(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y) = 2\omega\ell\boldsymbol{e}_z \wedge (-\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y) = -2\omega\ell(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)$$

ed ottenere che $\omega = \frac{v_0}{\ell}$. Con questo valore, sempre dalla formula fondamentale della cinematica rigida segue

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_F + \frac{v_0}{\ell}\boldsymbol{e}_z \wedge (A - F) = 2v_0(3\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y) - \frac{v_0}{\ell}\boldsymbol{e}_z \wedge 2\ell(1+\sqrt{3})\boldsymbol{e}_x$$

e quindi

$$\boldsymbol{v}_A = v_0[6\boldsymbol{e}_x + 2(1-\sqrt{3})\boldsymbol{e}_y].$$

Sia Q il centro di istantanea rotazione ed indichiamo con $Q - F = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y$ il suo vettore posizione rispetto ad F. Poiché $\boldsymbol{v}_Q = \boldsymbol{0}$ avremo

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}_F + \frac{v_0}{\ell}\boldsymbol{e}_z \wedge (x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y)$$

ovvero

$$-2v_0(3\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y) = \frac{v_0}{\ell}(-y\boldsymbol{e}_x + x\boldsymbol{e}_y)$$

da cui ricaviamo che

$$x = -4\ell \qquad \text{e} \qquad y = 6\ell\,.$$

Per determinare il momento di inerzia richiesto, fissiamo in F l'origine di un sistema Cartesiano ortogonale con assi diretti lungo $\boldsymbol{e}_x$ ed $\boldsymbol{e}_y$. L'equazione della retta s è

$$\sqrt{3}x - y = 0.$$

Partiamo dal disco, il cui centro di massa ha, rispetto ad F, coordinate $(0, 2\ell)$. La sua distanza da s è

$$d = \frac{|-2\ell|}{2} = \ell$$

e, grazie al teorema di Huygens-Steiner, concludiamo che

$$I_s = \frac{3m4\ell^2}{4} + 3m\ell^2 = 6m\ell^2\,.$$

Quanto al contributo dell'asta, osserviamo che essa è inclinata di un angolo $\frac{\pi}{6}$ rispetto ad s e che le coordinate del suo centro di massa rispetto ad F sono $(-2\ell, \ell)$. Pertanto la sua distanza h da s vale

$$h = \frac{|-2\sqrt{3}\ell - \ell|}{2} = \frac{2\sqrt{3}+1}{2}\ell.$$

Usando ancora il teoema di Huygens-Steiner avremo

$$I_s = \frac{1}{12}2m4\ell^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2mh^2 = \left[\frac{1}{6} + \frac{13+4\sqrt{3}}{2}\right] m\ell^2 = \left[\frac{20}{3} + 2\sqrt{3}\right] m\ell^2.$$

Passando infine al rettangolo $ABCD$, indichiamo con $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$ i versori associati ai vettori $B-A$ e $D-A$, rispettivamente. Sulla base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ la matrice centrale di inerzia è

$$\mathbb{I}_G = \frac{m\ell^2}{12}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Il versore $\boldsymbol{n}$ associato ad s si può scomporre sulla base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ come

$$\boldsymbol{n} = \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2$$

per cui il momento centrale di inerzia del rettangolo nella direzione $\boldsymbol{n}$ è

$$\boldsymbol{n} \cdot \mathbb{I}_G \boldsymbol{n} = \frac{7m\ell^2}{12}.$$

La posizione rispetto ad F del centro di massa del rettangolo si può scrivere nella forma

$$G - F = (G-A) + (A-F) = (G-A) - 2\ell(1+\sqrt{3})\boldsymbol{e}_x$$

e conviene sviluppare $G-A$ sulla base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$:

$$G - A = 2\ell\boldsymbol{e}_1 + \ell\boldsymbol{e}_2$$

in modo da avere

$$G - F = 2\ell\boldsymbol{e}_1 + \ell\boldsymbol{e}_2 - 2\ell(1+\sqrt{3})\boldsymbol{e}_x.$$

Proiettiamo lungo $\boldsymbol{e}_x$ ed $\boldsymbol{e}_y$ per ottenere le coordinate di G sulla base $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$ come

$$x_G = (G-F)\cdot\boldsymbol{e}_x = \sqrt{3}\ell - \frac{\ell}{2} - 2\ell(1+\sqrt{3}) = -\ell\left[\frac{5}{2} + \sqrt{3}\right]$$

e

$$y_G = (G-F)\cdot\boldsymbol{e}_y = \ell\left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right].$$

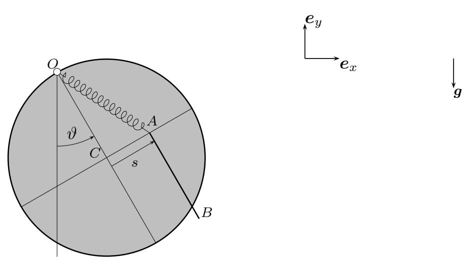
La distanza λ di G da r risulta

$$\lambda = \frac{\left|-\frac{5}{2}\sqrt{3} - 3 - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right| \ell}{2} = \frac{(3\sqrt{3}+4)\ell}{2}$$

e dal teorema di Huygens-Steiner otteniamo

$$I_s = \frac{7m\ell^2}{12} + m\ell^2 \frac{43+24\sqrt{3}}{4} = \frac{m\ell^2}{3}[34+18\sqrt{3}].$$

3. *In un piano verticale, un disco di massa $3m$ e raggio ℓ ruota attorno ad un punto fisso O della sua circonferenza. Lungo una scanalatura passante per il centro C ed ortogonale ad OC si muove l'estremo A di un'asta AB che rimane sempre ortogonale alla scanalatura. L'asta ha massa m e lunghezza ℓ. L'estremo A è attratto verso il punto O da una molla ideale di costante elastica $\frac{2mg}{\ell}$. Introdotte le coordinate ϑ ed s indicate in figura determinare: l'espressione*



*dell'energia cinetica T del sistema (**5** punti); l'espressione dell'energia potenziale V del sistema (**3** punti); il valore di $\ddot{s}(0)$ se, all'istante $t = 0$ il sistema parte dalla quiete con $s(0) = \frac{\ell}{2}$ e $\vartheta(0) = \frac{\pi}{2}$ (**3** punti).*

L'energia cinetica del disco è

$$T_D = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 I_{O,z}$$

dove$\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$ è la velocità angolare del disco. Il momento di inerzia $I_{O,z}$ del disco rispetto all'asse passante per O, diretto come $\boldsymbol{e}_z$ è, grazie al teorema di Huygens-Steiner,

$$I_{O,z} = \frac{3m}{2}\ell^2 + 3m\ell^2 = \frac{9}{2}m\ell^2$$

per cui

$$T_D = \frac{9}{4}m\ell^2\dot{\vartheta}^2.$$

Per ottenere il contributo dell'asta, introduciamo i versori $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ diretti rispettivamente come $B - A$ e come la direzione ortogonale a $B - A$, in modo che

$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_z$. Questa base ruota con la stessa velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ del disco, visto che l'asta cambia la propria inclinazione solo per effetto del trascinamento indotto dalla rotazione del disco. Detto G il centro di massa dell'asta, abbiamo

$$G - O = \frac{3}{2}\ell \boldsymbol{e}_1 + s\boldsymbol{e}_2$$

e quindi, siccome anche s dipende dal tempo, dalle formule di Poisson otteniamo

$$\boldsymbol{v}_G = -s\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{3}{2}\ell\dot{\vartheta} + \dot{s}\right)\boldsymbol{e}_2 \,.$$

L'energia cinetica dell'asta

$$T_a = \frac{m}{2}v_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot \mathbb{I}_G \boldsymbol{\omega}$$

diventa

$$T_a = \frac{m}{2}\left[s^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{9}{4}\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \dot{s}^2 + 3\ell\dot{s}\dot{\vartheta}\right] + \frac{m}{24}\ell^2\dot{\vartheta}^2$$

e l'energia cinetica complessiva è

$$T = \frac{m}{2}\left[s^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{41}{6}\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \dot{s}^2 + 3\ell\dot{s}\dot{\vartheta}\right].$$

Per l'energia potenziale occorre considerare il contributo della forza elastica

$$\frac{mg}{\ell}(s^2 + \ell^2),$$

il contributo della forza peso del disco che, presa l'orizzontale per O come quota di riferimento, vale

$$-3mg\ell\cos\vartheta$$

ed il contributo del peso dell'asta che vale

$$-\frac{3}{2}mg\ell\cos\vartheta + mgs\sin\vartheta.$$

In definitiva, eliminando una costante additiva, l'energia potenziale complessiva è

$$V = \frac{mg}{\ell}s^2 - \frac{9}{2}mg\ell\cos\vartheta + mgs\sin\vartheta$$

e quindi la lagrangiana è

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left[s^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{41}{6}\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \dot{s}^2 + 3\ell\dot{s}\dot{\vartheta}\right] - \frac{mg}{\ell}s^2 + \frac{9}{2}mg\ell\cos\vartheta - mgs\sin\vartheta$$

L'equazione di Lagrange rispetto ad s è

$$\ddot{s} + \frac{3}{2}\ell\ddot{\vartheta} = s\dot{\vartheta}^2 - \frac{2g}{\ell}s - g\sin\vartheta$$

e quella relativa a ϑ è

$$s^2\ddot{\vartheta} + 2s\dot{s}\dot{\vartheta} + \frac{41}{6}\ell^2\ddot{\vartheta} + \frac{3}{2}\ell\ddot{s} = -\frac{9}{2}g\ell\sin\vartheta - gs\cos\vartheta$$

Inserendo le condizioni iniziali, abbiamo il sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{s}(0) + \frac{3}{2}\ell\ddot{\vartheta}(0) = -2g \\ \frac{85}{12}\ell\ddot{\vartheta}(0) + \frac{3}{2}\ddot{s}(0) = -\frac{9g}{2} \end{array} \right.$$

da cui si ricava

$$\ddot{s}(0) = -\frac{89}{58}\frac{g}{\ell}\,.$$