Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Fisica Matematica (Ingegneria Industriale)
Appello del 28 giugno 2021

1. *Determinare, per il seguente sistema di vettori applicati,*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = -\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (3,2,1), \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_x - 3\boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (2,-1,1), \\ \boldsymbol{v}_3 = -4\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y - 5\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (1,-1,3) \end{cases}$$

*il risultante (**1** punto), il momento risultante (**3** punti). Trovare un sistema equivalente, formato da due vettori, di cui uno applicato nel punto $Q \equiv (-1,0,2)$ (**3** punti).*

Il risultante è $\boldsymbol{R} = -4\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y - 4\boldsymbol{e}_z$ ed il momento risultante rispetto al polo O è $\boldsymbol{M}_O = -8\boldsymbol{e}_x - 7\boldsymbol{e}_y + 4\boldsymbol{e}_z$. Il momento rispetto al punto Q si ottiene dal teorema di trasporto e vale

$$\boldsymbol{M}_Q = \boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{R} \wedge (Q - O) = \boldsymbol{M}_O + 4\boldsymbol{e}_x + 12\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z = -4\boldsymbol{e}_x + 5\boldsymbol{e}_y + 6\boldsymbol{e}_z.$$

Possiamo allora introdurre una coppia di vettori $\{(Q, -\boldsymbol{v}), (P, \boldsymbol{v})\}$ in modo che

$$\boldsymbol{M}_Q = (P - Q) \wedge \boldsymbol{v}$$

con l'unica condizione che $\boldsymbol{M}_Q \cdot \boldsymbol{v} = 0$ che può essere soddisfatta prendendo, ad esempio, $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_z$ e scegliendo il vettore $P - Q$ come una soluzione particolare dell'equazione precedente: ad esempio

$$(P - Q) = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|^2} \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{M}_Q = \frac{1}{13}(-10\boldsymbol{e}_x - 26\boldsymbol{e}_y + 15\boldsymbol{e}_z).$$

Se applichiamo il vettore $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_z$ in P, tale che

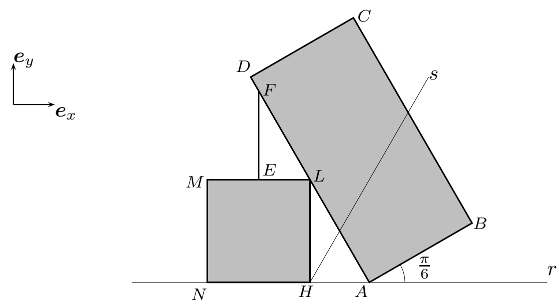
$$P - O = (P - Q) + (Q - O) = \frac{1}{13}(-10\boldsymbol{e}_x - 26\boldsymbol{e}_y + 15\boldsymbol{e}_z) - \boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_z = -\frac{23}{13}\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y + \frac{41}{13}\boldsymbol{e}_z,$$

ed in Q il vettore

$$\boldsymbol{R} - \boldsymbol{v} = -7\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y - 6\boldsymbol{e}_z$$

avremo un sistema equivalente a quello dato e che soddisfa tutte le condizioni del problema.

2. *Un corpo rigido è formato da un rettangolo $ABCD$ di massa m e lati AB, di lunghezza 2ℓ, inclinato di $\frac{\pi}{6}$ sull'orizzontale r, dove è appoggiato in A, ed $AD = 4\ell$; da un quadrato $HLMN$ di massa $2m$, lato $\ell\sqrt{3}$, con HN su r ed L*



*su AD; da un'asta verticale EF di massa $3m$, lunghezza $\frac{3}{2}\ell$, con E nel punto medio di LM e F su AD. Determinare il momento di inerzia di ciascuno dei tre corpi rispetto alla retta s passante per H, che forma un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con r (**10** punti); Determinare il momento centrale di inerzia del corpo nella direzione $\boldsymbol{e}_y$ (**4** punti).*

Prendiamo come origine di un riferimento cartesiano ortogonale il punto H cosicché l'equazione della retta r è

$$y = \sqrt{3}x \qquad \text{cioè} \qquad \sqrt{3}x - y = 0$$

Inoltre, se introduciamo i versori ortogonali $\boldsymbol{e}_1 = \frac{B-A}{|B-A|}$ e $\boldsymbol{e}_2 = \frac{D-A}{|D-A|}$ e tali che $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_z$, la posizione del centro di massa G_R del rettangolo $ABCD$ rispetto ad H è

$$G_R - H = (G_R - A) + (A - H) = \ell \boldsymbol{e}_1 + 2\ell \boldsymbol{e}_2 + \ell \boldsymbol{e}_x$$

dove abbiamo osservato che $AH = \ell$. Dunque

$$x_{G_R} = (G_R - H) \cdot \boldsymbol{e}_x = \ell \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\ell \frac{1}{2} + \ell = \ell \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e

$$y_{G_R} = (G_R - H) \cdot \boldsymbol{e}_y = \frac{1}{2}\ell + \ell\sqrt{3}.$$

Il versore $\boldsymbol{n}$ associato ad s si sviluppa sulla base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ come

$$\boldsymbol{n} = \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2$$

e su questa base il tensore centrale di inerzia del rettangolo è

$$\mathbb{I}_{G_R} = \frac{m\ell^2}{12} \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

per cui

$$I_{G_R,\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n} \cdot \mathbb{I}_{G_R} \boldsymbol{n} = \frac{13m}{12}\ell^2.$$

Per il teorema di Huygens-Steiner avremo allora

$$I_{H,\boldsymbol{n}} = I_{G_R,\boldsymbol{n}} + md^2$$

dove d è la distanza di G_R da s che si può calcolare con la formula della distanza di un punto da s

$$d = \frac{|\sqrt{3}x_{G_R} - y_{G_R}|}{2} = \frac{\ell}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

cosicché

$$I_{H,\boldsymbol{n}} = \frac{13m}{12}\ell^2 + m\frac{\ell^2}{4}(4 - 2\sqrt{3}) = \frac{m}{12}\ell^2(25 - 6\sqrt{3})\,.$$

Passando al quadrato, il suo centro di massa G_Q ha, rispetto ad H, le coordinate

$$x_{G_Q} = -\ell\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad y_{G_Q} = \ell\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ed il momento centrale di inerzia nella direzione $\boldsymbol{n}$, come lungo tutte le direzioni del piano della figura, è $\frac{2m}{12}(\ell\sqrt{3})^2 = \frac{m\ell^2}{2}$. Se h indica la distanza di Q da s, avremo

$$I_{H,\boldsymbol{n}} = \frac{m}{2}\ell^2 + 2mh^2$$

ovvero, siccome

$$h = \frac{|\sqrt{3}x_{G_Q} - y_{G_Q}|}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{4}\ell,$$

$$I_{H,\boldsymbol{n}} = 2m\ell^2\left(1 + \frac{3}{8}\sqrt{3}\right)\,.$$

Infine, il centro di massa dell'asta ha coordinate rispetto ad H

$$x_{G_A} = -\ell\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad y_{G_Q} = \ell\left(\sqrt{3} + \frac{3}{4}\right)$$

ed essendo l'angolo che essa forma con s di ampiezza $\frac{\pi}{6}$, abbiamo anzitutto

$$I_{G_A} = \frac{3m}{12}\frac{9}{4}\ell^2\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{9}{64}m\ell^2.$$

Applichiamo ancora il teorema di Huygens-Steiner per ottenere

$$I_{H,\boldsymbol{n}} = \frac{9}{64}m\ell^2 + 3m\lambda^2\,.$$

Essendo la distanza λ di G_A da s

$$\lambda = \frac{9 + 4\sqrt{3}}{8}\ell,$$

otteniamo

$$I_{H,\boldsymbol{n}} = \frac{9}{64}m\ell^2 + \frac{3m\ell^2}{64}\left(8\sqrt{3}+129\right) = \frac{3m\ell^2}{16}(2\sqrt{3}+33).$$

Per la seconda parte dell'esercizio possiamo applicare il teorema di composizione prendendo come corpo $\mathcal{B}_1$ il rettangolo $ABCD$ e come corpo $\mathcal{B}_2$ l'unione del quadrato e dell'asta, il cui centro di massa Q è sulla verticale congiungente G_A e G_Q. Abbiamo allora, detto G il centro di massa del corpo completo $\mathcal{B}$

$$I_{G,\boldsymbol{e}_y}(\mathcal{B}) = I_{G_R,\boldsymbol{e}_y}(\mathcal{B}_1) + I_{Q,\boldsymbol{e}_y}(\mathcal{B}_2) + \mu d_{12}^2$$

dove $\mu = \frac{5m}{6}$ è la massa ridotta del sistema e d_{12} la distanza dei due assi paralleli ad $\boldsymbol{e}_y$, passanti per Q e G_A. In primo luogo, abbiamo

$$I_{G_R,\boldsymbol{e}_y}(\mathcal{B}_1) = \boldsymbol{e}_y \cdot \mathbb{I}_{G_R}(\mathcal{B}_1)\boldsymbol{e}_y$$

ed essendo

$$\boldsymbol{e}_y = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_1$$

si ha

$$I_{G_R,\boldsymbol{e}_y}(\mathcal{B}_1) = \frac{7}{12}m\ell^2.$$

Inoltre

$$d_{12} = x_{G_R} - x_Q = x_{G_R} - x_{G_A} = x_{G_R} - x_{G_Q} = \sqrt{3}\ell$$

per cui

$$I_{G,\boldsymbol{e}_y}(\mathcal{B}) = \frac{7}{12}m\ell^2 + I_{Q,\boldsymbol{e}_y}(\mathcal{B}_2) + \frac{5}{2}m\ell^2.$$

Infine, riapplichiamo il teorema di composizione al solo corpo $\mathcal{B}_2$ per ottenere

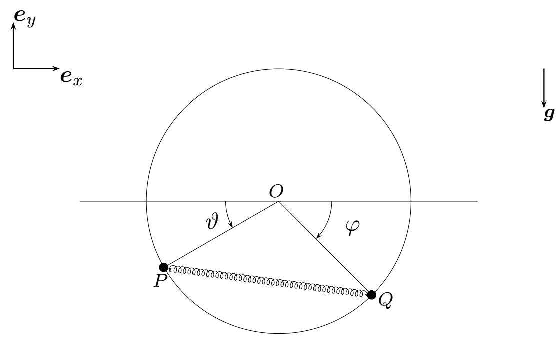
$$I_{Q,\boldsymbol{e}_y}(\mathcal{B}_2) = \frac{2m}{12}3\ell^2 = \frac{m\ell^2}{2}$$

visto che il momento centrale di inerzia dell'asta lungo $\boldsymbol{e}_y$ si annulla.

Dunque

$$I_{G,\boldsymbol{e}_y}(\mathcal{B}) = \frac{7}{12}m\ell^2 + \frac{m\ell^2}{2} + \frac{5}{2}m\ell^2 = \frac{43}{12}m\ell^2.$$

3. *In un piano verticale, su una circonferenza fissa di centro O e raggio R, sono mobili senza attrito due punti materiali P e Q, rispettivamente di massa m e $3m$. I punti sono attratti da una molla ideale di costante elastica $2\frac{mg}{R}$. Introdotte le coordinate ϑ e φ indicate in figura, determinare l'energia cinetica (**2** punti) e l'energia potenziale del sistema (**3** punti). Scrivere le equazioni di Lagrange e trovare i valori di $\ddot{\vartheta}(0)$ e $\ddot{\varphi}(0)$, sapendo che il sistema parte dalla quiete nella configurazione in cui $\vartheta(0) = \frac{\pi}{6}$ e $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$ (**4** punti).*



Le velocità angolari dei raggi vettori $P - O$ e $Q - O$ sono, rispettivamente:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z \qquad \boldsymbol{\omega}_2 = -\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_z$$

per cui l'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{m}{2}R^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{3m}{2}R^2\dot{\varphi}^2.$$

Per il calcolo dell'energia potenziale V, prendiamo come quota di riferimento per l'energia gravitazionale l'orizzontale passante per O, cosicché il contributo della forza peso a V è

$$-mgR(\sin\vartheta + 3\sin\varphi).$$

Per la forza elastica, il contributo è, applicando il teorema del coseno al triangolo OPQ,

$$\frac{mg}{R}|P-Q|^2 = \frac{mg}{R}[2R^2 - 2R^2\cos(\pi - \vartheta - \varphi)] = 2mgR[1 + \cos(\vartheta + \varphi)];$$

in definitiva

$$V = -mgR(\sin\vartheta + 3\sin\varphi) + 2mgR[1 + \cos(\vartheta + \varphi)]$$

e, di conseguenza

$$L = T - V = \frac{m}{2}R^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{3m}{2}R^2\dot{\varphi}^2 + mgR(\sin\vartheta + 3\sin\varphi) - 2mgR[1 + \cos(\vartheta + \varphi)].$$

Possiamo allora scrivere le equazioni di Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial\vartheta} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \frac{\partial L}{\partial\varphi}$$

come

$$mR^2\ddot{\vartheta} = mgR\cos\vartheta + 2mgR\sin(\vartheta+\varphi) \qquad \text{e} \qquad 3mR^2\ddot{\varphi} = 3mgR\cos\varphi + 2mgR\sin(\vartheta+\varphi).$$

Se inseriamo le condizioni iniziali, abbiamo

$$\ddot{\vartheta}(0) = -\frac{g\sqrt{3}}{2R} \qquad \text{e} \qquad \ddot{\varphi}(0) = -\frac{g\sqrt{3}}{3R}\,.$$