UNIVERSITÀ DI PAVIA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA
Correzione prova scritta
14 luglio 2011

1. *Determinare le coordinate* (x, z) *del punto di intersezione con il piano* $y = 0$ *dell'asse centrale del seguente sistema di vettori applicati:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y - 3\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (2, 0, 0), \\ \boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (1, -1, 2), \\ \boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{e}_x - 4\boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (0, 3, 0). \end{cases}$$

Il risultante di questo sistema è $\boldsymbol{R} = 3\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z$ ed il momento risultante rispetto ad O è $\boldsymbol{M}_O = 5\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_z$ per cui i punti Q del tipo $Q - O = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ stanno sull'asse centrale se e solo se soddisfano l'equazione

$$Q - O = \frac{1}{|\boldsymbol{R}|^2}\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{M}_O + \lambda\boldsymbol{R}$$

ovvero, essendo $\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{M}_O = -2\boldsymbol{e}_x + 16\boldsymbol{e}_y + 11\boldsymbol{e}_z$, se e solo se verificano il sistema

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{7} + 3\lambda \\ y = \frac{8}{7} - \lambda \\ z = \frac{11}{14} + 2\lambda. \end{cases}$$

Posto $y = 0$, dalla seconda equazione del sistema si ottiene il corrispondente valore di $\lambda = \frac{8}{7}$ che, sostituito nelle altre due equazioni fornisce le coordinate (x, z) del punto di intersezione richiesto:

$$x = \frac{23}{7} \qquad z = \frac{43}{14}.$$

2. *Trovare il versore binormale della curva*

$$p(t) - O = \sin t\boldsymbol{e}_x + \mathrm{e}^t\boldsymbol{e}_y + 4t\boldsymbol{e}_z$$

nel punto corrispondente a $t = 0$.

Il versore binormale $\boldsymbol{b}$ è definito da $\boldsymbol{b} = \frac{\dot{p} \wedge \ddot{p}}{|\dot{p} \wedge \ddot{p}|}$ ed in questo caso dove

$$\dot{p}(t) = \cos t\boldsymbol{e}_x + \mathrm{e}^t\boldsymbol{e}_y + 4\boldsymbol{e}_z \qquad \text{e} \qquad \ddot{p}(t) = -\sin t\boldsymbol{e}_x + \mathrm{e}^t\boldsymbol{e}_y,$$

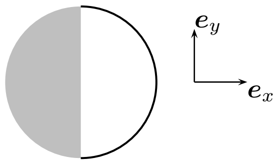
ponendo $t = 0$ si ha

$$\dot{p}(0) = \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + 4\boldsymbol{e}_z \qquad \text{e} \qquad \ddot{p}(0) = \boldsymbol{e}_y,$$

per cui

$$\boldsymbol{b} = \frac{-4\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_z}{\sqrt{17}}.$$

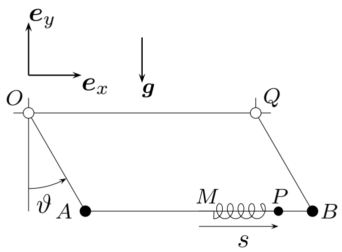
3. *Un corpo rigido piano è formato da un semidisco di massa $4m$ e raggio R e da una semicirconferenza di massa $7m$ e raggio R, disposti come in figura. Determinare il momento centrale di inerzia del corpo della direzione $\boldsymbol{e}_x$.*



Rispetto all'asse centrale diretto come $\boldsymbol{e}_x$, sia il semidisco che la semicirconferenza contribuiscono come la metà di un disco e di una circonferenza di masse doppie di quelle di partenza. Dunque

$$I_{G,\boldsymbol{e}_x} = mR^2 + \frac{7}{2}mR^2 = \frac{9}{2}mR^2.$$

4. *In un piano verticale, un'asta AB di massa trascurabile e lunghezza 2ℓ reca due punti materiali fissati in A e B di masse, rispettivamente, $2m$ e $3m$. Sull'asta è mobile un altro punto materiale P di massa m, attirato verso il punto medio M di AB da una molla ideale di costante $3mg/\ell$. L'asta AB ha gli estremi vincolati ad altre due aste senza massa e di ugual lunghezza ℓ, incernierate a loro volta a due punti fissi O e Q, posti alla stessa quota e distanti 2ℓ tra loro. Introdotte le coordinate generalizzate ϑ ed s indicate in figura, determinare: l'energia cinetica del sistema; l'energia potenziale del sistema; i valori di $\ddot{\vartheta}(0)$ e $\ddot{s}(0)$ se le condizioni iniziali sono $\vartheta(0) = \frac{\pi}{6}$, $s(0) = \frac{\ell}{2}$,$\dot{\vartheta}(0) = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$, $\dot{s}(0) = 0$.*



I punti materiali concentrati in A e B si muovono lungo circonferenze di raggio ℓ centrate, rispettivamente in O e Q, con velcoità angolare $\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$. Introdotti i versori solidali ad OA: $\boldsymbol{e}_1$, diretto lungo $A - O$; $\boldsymbol{e}_2$, ortogonale ad $\boldsymbol{e}_1$ e tale che $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_z$, possiamo scrivere il vettore posizione del punto P come

$$P - O = \ell\boldsymbol{e}_1 + (\ell + s)\boldsymbol{e}_x$$

da cui otteniamo

$$\boldsymbol{v}_P = \ell\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_2 + \dot{s}\boldsymbol{e}_x.$$

Se osserviamo che $\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_2 = \cos\vartheta$ abbiamo che l'energia cinetica di tutto il sistema è

$$T = m\ell^2\dot\vartheta^2 + \frac{3}{2}m\ell^2\dot\vartheta^2 + \frac{1}{2}m[\ell^2\dot\vartheta^2 + \dot s^2 + 2\ell\dot\vartheta\dot s\cos\vartheta] = 3m\ell^2\dot\vartheta^2 + \frac{m}{2}[\dot s^2 + 2\ell\dot s\dot\vartheta\cos\vartheta].$$

All'energia potenziale contribuiscono la forza peso e la forza elastica, quest'ultima pari a $\frac{3}{2}\frac{mg}{\ell}s^2$:

$$V = -6mg\ell\cos\vartheta + \frac{3}{2}\frac{mg}{\ell}s^2.$$

Possiamo ora scrivere la lagrangiana $L = T - V$

$$L = 3m\ell^2\dot\vartheta^2 + \frac{m}{2}[\dot s^2 + 2\ell\dot s\dot\vartheta\cos\vartheta] + 6mg\ell\cos\vartheta - \frac{3}{2}\frac{mg}{\ell}s^2$$

da cui ricaviamo le equazioni di moto di Lagrange

$$m\ddot s + m\ell(\ddot\vartheta\cos\vartheta - \dot\vartheta^2\sin\vartheta) = -3\frac{mg}{\ell}s$$

e

$$6m\ell^2\ddot\vartheta + m\ell(\ddot s\cos\vartheta - \dot s\dot\vartheta\sin\vartheta) = -m\ell\dot s\dot\vartheta\sin\vartheta - 6mg\ell\sin\vartheta.$$

Inserendo le condizioni iniziali abbiamo il sistema

$$\begin{cases} \ddot s(0) + \frac{\ell\sqrt3}{2}\ddot\vartheta(0) = -g \\ \\ \frac{\sqrt3}{2}\ddot s(0) + 6\ell\ddot\vartheta(0) = -3g. \end{cases}$$

Se moltiplichiamo la prima equazione per $\frac{\sqrt3}{2}$ e le sottraiamo la seconda ricaviamo

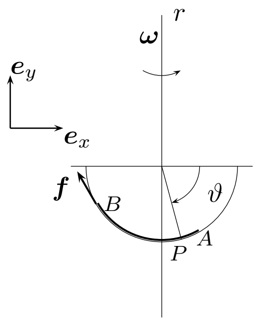
$$\ddot\vartheta(0) = -\frac{2g}{\ell}\frac{6-\sqrt3}{21}$$

che sostituita nella prima equazione del sistema permette di ricavare

$$\ddot s(0) = \frac{g}{7}\left(2\sqrt3 - 8)\right).$$

5. *In un piano che ruota attorno ad un asse fisso r con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega} = 3\sqrt{\frac{g}{R}}\boldsymbol{e}_y$ un filo omogeneo AB di densità lineare di massa $4m/R$ e lunghezza $\frac{\pi}{2}R$ è appoggiato senza attrito su una semicirconferenza di raggio R, simmetrica rispetto ad r (vedi figura). Sia ϑ l'angolo che l'orizzontale forma con il raggio del generico punto P del filo. Determinare, trascurando la gravità ed in condizioni di equilibrio relativo, il valore della tensione nel punto generico P del filo, in funzione di ϑ. Supponiamo ora che sull'estremo B agisca una forza $\boldsymbol{f}$ di intensità γmg, tangente in B al supporto e sia ϑ_A il valore di ϑ in A nella nuova configurazione di equilibrio. Trovare il valore di γ per cui $\vartheta_A = \frac{\pi}{6}$; trovare il massimo valore di γ per cui il filo può stare in equilibrio giacendo tutto sul supporto.*

In assenza della forza $\boldsymbol{f}$, la tensione in A e B deve essere nulla. Poiché l'unica forza attiva agente sul filo nel riferimento non ineraizle è quella centrifuga, che ha energia potenziale per unità di lunghezza



$v = -\frac{1}{2}\lambda\omega^2 d^2$ dove λ è la densità lineare di massa del filo e d la distanza del generico punto del filo dall'asse r, la tensione in P risulta essere

$$\tau(\vartheta) = -18mg\cos^2\vartheta + c \tag{1}$$

con c costante di integrazione. I valori ϑ_A e $\vartheta_B = \vartheta_A + \frac{\pi}{2}$ di ϑ nei punti A e B si ottengono imponendo $\tau(\vartheta_A) = \tau(\vartheta_B) = 0$ e questo richiede

$$\cos^2\vartheta_A = \sin^2\vartheta_A$$

cioè che $\vartheta_A = \frac{\pi}{4}$ che significa che il filo si dispone simmetricamente rispetto ad r. Per determinare c imponiamo allora $\tau(\vartheta_A) = \tau(\frac{\pi}{4}) = 0$ ottenendo $c = 9mg$ e dunque

$$\tau(\vartheta) = 9mg(1 - 2\cos^2\vartheta).$$

L'introduzione della forza $\boldsymbol{f}$ rompe la simmetria della configurazione di equilibrio del filo. Ora si riparte dalla (1), con le condizioni al contorno

$$\tau(\vartheta_A) = 0 \qquad \tau(\vartheta_B) = \tau(\vartheta_A + \frac{\pi}{2}) = \gamma mg.$$

Abbiamo allora il sistema

$$\begin{cases} -18mg\cos^2\vartheta_A + c = 0 \\ \\ -18mg\sin^2\vartheta_A + c = \gamma mg \end{cases} \tag{2}$$

e sottratta la prima dalla seconda equazione, inserendo $\vartheta_A = \frac{\pi}{6}$ ricaviamo

$$\gamma = 9.$$

Infine, il massimo valore di γ compatibile con l'equilibrio del filo all'interno del supporto si ottiene riprendendo il sistema (2) ma lasciando libero ϑ_A. Sottraendo ancora la prima dalla seconda equazione di (2) si ottiene

$$\gamma = 18(\cos^2\vartheta_A - \sin^2\vartheta_A) = 18\cos 2\vartheta_A \leq 18$$

e dunque $\gamma_{\max} = 18$. Il massimo corrisponde dunque alla configurazione in cui $\vartheta_A = 0$.