Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Edile/Architettura
***Correzione prova scritta***
*3 febbraio 2011*

**1.** *Determinare il trinomio invariante del seguente sistema di vettori applicati:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = -3\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_1 - O \equiv (2,1,0), \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_2 - O \equiv (1,0,1), \\ \boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_3 - O \equiv (0,2,2). \end{cases}$$

Il risultante è $\boldsymbol{R} = -2\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_z$ mentre il momento risultante rispetto ad $O$ è $\boldsymbol{M}_O = -10\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y + 5\boldsymbol{e}_z$ per cui il trinomio invariante ha valore $\mathcal{I} = 26$.

**2.** *Trovare la curvatura della curva*

$$p(t) - O = 3(t^2 - 3t + 1)\boldsymbol{e}_x + (t^2 + 5t - 2)\boldsymbol{e}_y + \sin t\boldsymbol{e}_z$$

*nel punto corrispondente a* $t = 0$.

Derivando ripetutamente rispetto al parametro $t$ abbiamo

$$p'(t) = 3(2t - 3)\boldsymbol{e}_x + (2t + 5)\boldsymbol{e}_y + \cos t\boldsymbol{e}_z \qquad p''(t) = 6\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y - \sin t\boldsymbol{e}_z$$

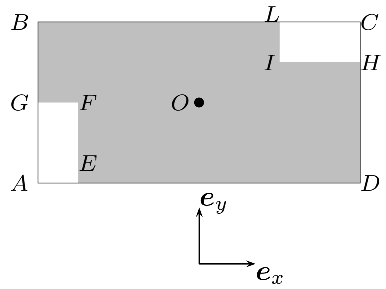
per cui, posto $t = 0$ si ha

$$p'(0) = -9\boldsymbol{e}_x + 5\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z \qquad p''(0) = 6\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y$$

da cui segue $|p'(0)| = \sqrt{107}$ e $p'(0) \wedge p''(0) = -2\boldsymbol{e}_x + 6\boldsymbol{e}_y - 48\boldsymbol{e}_z$ da cui si ottiene

$$\kappa = \frac{2\sqrt{586}}{107\sqrt{107}}.$$

**3.** *Da una lamina rettangolare omogenea $ABCD$ di massa $3m$ e lati $AB = 2\ell$ e $BC = 6\ell$ vengono asportati due rettangoli congruenti $AEFG$ e $CHIL$ di lati $AE = CH = \frac{\ell}{2}$ e $AG = CL = \ell$.*




*Detto $O$ il centro di massa di $ABCD$ determinare il momento di inerzia della lamina complessiva rispetto all'asse passante per $O$, diretto lungo $\boldsymbol{e}_x$.*

È sufficiente sottrarre al momento centrale di inerzia per il rettangolo intero i contributi dei due rettangoli $AEFG$ ed $IHCL$ utilizzando il teorema di Huygens-Steiner. Osserviamo che la massa di ciascuno dei rettangoli asportati è pari ad $m/8$ per cui

$$I_{O,\boldsymbol{e}_x}(ABCD) = m\ell^2,$$

mentre

$$I_{O,\boldsymbol{e}_x}(AEFG) = \frac{m\ell^2}{96} + \frac{m\ell^2}{32} = \frac{m\ell^2}{24}$$

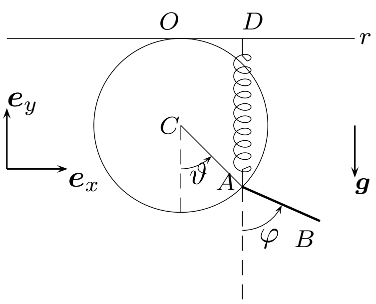
ed

$$I_{O,\boldsymbol{e}_x}(IHCL) = \frac{m\ell^2}{384} + \frac{9m\ell^2}{128} = \frac{7m\ell^2}{96}$$

per cui, in definitiva

$$I_{O,\boldsymbol{e}_x}(\text{tot}) = I_{O,\boldsymbol{e}_x}(ABCD) - I_{O,\boldsymbol{e}_x}(AEFG) - I_{O,\boldsymbol{e}_x}(IHCL) = \frac{85}{96}m\ell^2.$$

**4.***In un piano verticale, un'asta omogenea $AB$ di massa $2m$ e lunghezza $R$ ha l'estremo $A$ vincolato a muoversi senza attrito su una circonferenza fissa di centro $C$, raggio $R$, tangente in $O$ ad una guida orizzontale $r$. L'asta è libera di ruotare attorno ad $A$ che a sua volta è attratto da una forza elastica di costante $k = mg/2R$ verso il punto $D \in r$ posto sempre sulla verticale per $A$. Introdotte le coordinate $\vartheta$ e $\varphi$ indicate in Figura determinare: l'espressione dell'energia cinetica $T$ di $AB$; l'espressione dell'energia potenziale totale $V$ del sistema; le pulsazioni $\omega$ delle piccole oscillazioni in un intorno della configurazione di equilibrio stabile con $AB$ verticale.*




Detto $G$ il centro di massa dell'asta, l'energia cinetica si esprime come

$$T = mv_G^2 + \frac{m}{12}R^2\dot{\varphi}^2.$$

Introduciamo i versori $\boldsymbol{e}_1 := \frac{A-C}{|A-C|}$ ed $\boldsymbol{e}_3 := \frac{B-A}{|B-A|}$ ed i versori $\boldsymbol{e}_2$ ed $\boldsymbol{e}_4$ tali che $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{e}_z$. Osserviamo che la coppia $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ ruota con velocità angolare $\omega_1 = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$ mentre la coppia $\{\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ con velocità angolare $\omega_3 = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_z$. Possiamo allora scrivere

$$G - C = R\boldsymbol{e}_1 + \frac{R}{2}\boldsymbol{e}_3$$

e quindi, grazie alle formule di Poisson,

$$\boldsymbol{v}_G = R(\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\dot{\varphi}}{2}\boldsymbol{e}_4).$$

Per definizione di $\boldsymbol{e}_1$ ed $e_3$ abbiamo

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \cos(\varphi - \vartheta) = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_4$$

dove l'ultima uguagilanza segue dal fatto che $\boldsymbol{e}_2$ ed $e_4$ sono mutuamente ortogonali ad $\boldsymbol{e}_1$ ed $e_3$. Abbiamo allora

$$v_G^2 = R^2[\dot{\vartheta}^2 + \frac{\dot{\varphi}^2}{4} + \dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos(\varphi - \vartheta)]$$

e quindi

$$T = mR^2[\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{3}\dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos(\varphi - \vartheta)].$$

Quanto all'energia potenziale, essa consta di due termini, uno dovuto alla forza peso e pari a $-2mgR(\cos\vartheta + \frac{1}{2}\cos\varphi)$ e l'altro legato alla forza elastica e pari a $\frac{mgR}{4}(1+\cos\vartheta)^2$. In definitiva dunque

$$V = \frac{mgR}{4}(1 + \cos^2\vartheta - 6\cos\vartheta - 4\cos\varphi).$$

Per rispondere all'ultimo quesito determiniamo le configurazioni di equilibrio risolvendo il sistema $\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$, cioè a dire

$$\begin{cases} mgR\sin\vartheta[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos\vartheta] = 0 \\ mgR\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

da cui si ottengono quattro configurazioni di equilibrio, caratterizzate dalle seguenti coppie $(\vartheta, \varphi)$:

$$E_1 = (0,0) \quad E_2 = (0,\pi) \quad E_3 = (\pi, 0) \quad E_4 = (\pi,\pi).$$

Per studiarne la stabilità, calcoliamo le derivate seconde

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} = \frac{mgR}{2}[\cos\vartheta(3 - \cos\vartheta) + \sin^2\vartheta] \quad \frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta\partial\varphi} = 0 \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = mgR\cos\varphi$$

in corrispondenza delle configurazioni di equilibrio trovate. L'analisi della forma hessiana consente di concludere che $E_2$ ed $E_3$ sono punti di sella mentre $E_4$ è un massimo di $V$ e dunque sono configurazioni di equilibrio instabile, per il primo criterio di Ljapunov. Al contrario, $E_1$ ha forma hessiana

$$B = \begin{pmatrix} mgR & 0 \\ 0 & mgR \end{pmatrix}$$

che è definita positiva e dunque corrisponde ad un punto di minimo relativo isolato per $V$ ed è stabile grazie al teorema di Dirichlet-Lagrange. La corrispondente forma quadratica $A$ associata all'energia cinetica è data da

$$A = \begin{pmatrix} 2mR^2 & mR^2 \\ mR^2 & \frac{2}{3}mR^2 \end{pmatrix}.$$

Dopo alcune semplificazioni l'equazione $\det(\lambda A - B) = 0$ si riduce a

$$\lambda^2 - 8\frac{g}{R}\lambda + 3\frac{g^2}{R^2} = 0$$

che è risolta da

$$\lambda_{\pm} = \left(4 \pm \sqrt{13}\right)\frac{g}{R}$$

cui corrispondono le pulsazioni

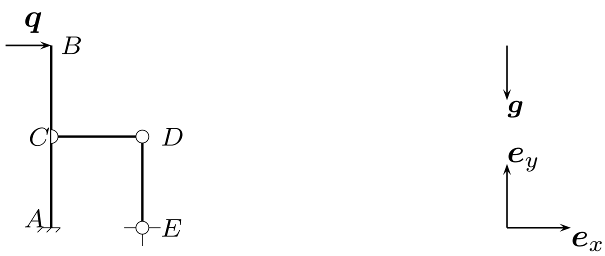
$$\omega_{\pm} = \sqrt{\left(4 \pm \sqrt{13}\right)\frac{g}{R}}.$$

**5.***La struttura articolata in Figura è formata da tre aste: $AB$, di peso trascurabile e lunghezza $2\ell$, $CD$ di peso $3p$ e lunghezza $\ell$ e $DE$, di peso $2p$ e lunghezza $\ell$. La struttura è vincolata a terra in due punti $A$ ed $E$ alla stessa quota e distanti $\ell$ tra loro, con un carrello in $A$ ed una cerniera in $E$. Cerniere interne sono presenti in $D$ ed in $C$, punto medio di $AB$. In $B$ agisce il carico $\boldsymbol{q} = 4p\boldsymbol{e}_x$.*

**1** Calcolare le componenti lungo $\boldsymbol{e}_x$ ed $\boldsymbol{e}_y$ della reazione vincolare in $E$.

**2** Calcolare la coppia reattiva $\psi\boldsymbol{e}_z$ sviluppata dall'incastro in $A$.

**3** Calcolare il modulo del momento flettente nel punto medio di $CD$.




Consideriamo l'equilibrio dell'asta $DE$ su cui agisce la reazione a terra $\boldsymbol{\Phi}_E = \phi_{Ex}\boldsymbol{e}_x + \phi_{Ey}\boldsymbol{e}_y$; il peso $-2p\boldsymbol{e}_y$ applicato nel centro di massa e la reazione di cerniera in $D$, $\boldsymbol{\Phi}_D = \phi_{Dx}\boldsymbol{e}_x + \phi_{Dy}\boldsymbol{e}_y$. L'equilibrio dei momenti in $D$ richiede $\phi_{Ex} = 0$ e l'equilibrio delle forze nella direzione $\boldsymbol{e}_x$ richiede allora $\Phi_{Dx} = 0$. Consideriamo ora l'asta $CD$ su cui agisce una reazione $-\boldsymbol{\Phi}_D = -\phi_{Dy}\boldsymbol{e}_y$, il peso $-3p\boldsymbol{e}_y$ applicato nel suo punto medio e la reazione di cerniera in $C$, $\boldsymbol{\Phi}_C$, che può avere solo componente lungo $\boldsymbol{e}_y$, visto che un'eventuale componente lungo $\boldsymbol{e}_x$ non potrebbe essere equilibrata: dunque $\boldsymbol{\Phi}_C = \phi_{Cy}\boldsymbol{e}_y$. L'equilibrio dei momenti agenti su $CD$ rispetto al polo $C$ impone $\phi_{Dy} = -\frac{3}{2}p$. Abbiamo allora $\boldsymbol{\Phi}_C = \frac{3}{2}p\boldsymbol{e}_y$ e, tornando all'asta $DE$ per richiedere l'equilibrio delle forze nella direzione $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{\Phi}_E = \frac{7}{2}p\boldsymbol{e}_y$. Isoliamo l'asta $AB$ su cui agisce il carico $\boldsymbol{q} = 4p\boldsymbol{e}_x$, la reazione in $A$, $\boldsymbol{\Phi}_A = \phi_{Ax}\boldsymbol{e}_x + \phi_{Ay}\boldsymbol{e}_y$, la coppia reattiva $\psi\boldsymbol{e}_z$ sviluppata dall'incastro e la reazione $-\boldsymbol{\Phi}_C = -\frac{3}{2}p\boldsymbol{e}_y$ dovuta alla cerniera in $C$. L'equilibrio dei momenti rispetto ad $A$ richiede

$$\psi - 8p\ell = 0$$

per cui $8p\ell\boldsymbol{e}_z$ è la coppia reattiva. Infine, spezzando l'asta $CD$ nel punto medio e considerando il tratto $CD$, di peso $\frac{3}{2}p$ e lunghezza $\ell/2$, ricordando il valore di $\boldsymbol{\Phi}_C$ abbiamo che il momento flettente $\boldsymbol{M}_f = M_f\boldsymbol{e}_z$ nel punto medio di $CD$ soddisfa l'equazione

$$M_f - \frac{3}{4}p\ell + \frac{3}{8}p\ell = 0$$

e dunque il modulo del momento flettente è $M_f = \frac{3}{8}p\ell$.