

UNIVERSITÀ DI PAVIA  
FACOLTÀ DI INGEGNERIA  
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE E AMBIENTALE/PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO  
**Esame di Fisica Matematica**  
21 febbraio 2014

Il *candidato* scriva nello spazio sottostante il proprio Cognome e Nome.

COGNOME

NOME

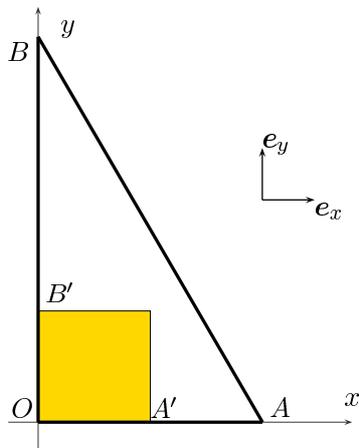
La *prova* consta di **3** esercizi e durerà **2 ore e 30 minuti**. *Non è permesso* usare né calcolatrice né telefono cellulare/smartphone; non è consentito consultare testi o appunti, al di fuori di quelli eventualmente distribuiti dalla Commissione pena l'esclusione dalla prova.

1. Considerato il seguente sistema di vettori applicati:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y - 2\mathbf{e}_z & \text{applicato in } P_1 - O \equiv (2, 1, 0), \\ \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z & \text{applicato in } P_2 - O \equiv (1, 0, 1), \\ \mathbf{v}_3 = 2\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y + 2\mathbf{e}_z & \text{applicato in } P_3 - O \equiv (0, 1, -1). \end{cases}$$

Determinare:

1. il risultante del sistema (**1 punto**).
  2. il momento risultante del sistema (**3 punti**).
  3. il trinomio invariante del sistema (**1 punto**).
  4. l'equazione dell'asse centrale del sistema (**2 punti**).
2. Un corpo rigido piano è ottenuto saldando agli estremi tre aste omogenee:  $OA$  di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$  e  $OB$  di massa  $3m$  e lunghezza  $2\sqrt{3}\ell$ , in modo da formare un angolo retto, e  $AB$  di massa  $2m$  inoltre, un lamina quadrata omogenea di massa  $m$  e lato  $OA' = OB' = \ell$  ha i lati saldati alle aste  $OA$  ed  $OB$  (vedi figura). Rispetto alla base  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ , i cui versori  $\mathbf{e}_x$  ed  $\mathbf{e}_y$  sono diretti come  $OA$  e  $OB$ , determinare:
1. Le coordinate del centro di massa del sistema, rispetto al punto  $O$  (**2 punti**).
  2. La matrice di inerzia complessiva  $[I_O]$  del corpo, specificando i contributi delle aste e del rettangolo (**10 punti**).
  3. I momenti principali di inerzia rispetto ad  $O$  (autovalori della matrice di inerzia, **2 punti**).
  4. La tangente trigonometrica dell'angolo che la base principale di inerzia forma rispetto alla base canonica (**2 punti**).



2. In un piano verticale, un'asta omogenea  $OA$ , di lunghezza  $4\ell$  e massa  $3m$  è saldata ortogonalmente al punto medio di una seconda asta omogenea  $BC$  di lunghezza  $3\ell$  e massa  $m$ , ed è vincolata a ruotare attorno all'estremo  $O$ . Un punto materiale  $P$  di massa  $m$  è libero di muoversi lungo una guida orizzontale passante per  $O$  ed è attratto verso  $A$  da una molla ideale di costante  $k = \gamma \frac{mg}{\ell}$  e lunghezza a riposo nulla. Usando come coordinate lagrangiane l'angolo  $\vartheta$  che  $OA$  forma con la verticale discendente, contato positivamente in senso antiorario, e l'ascissa  $x$  di  $P$  misurata a partire da  $O$  (vedi figura), si determini:

1. l'energia cinetica  $T(\vartheta, x, \dot{\vartheta}, \dot{x})$  del sistema; **(3 punti)**
2. l'energia potenziale  $V(\vartheta, x)$  del sistema; **(3 punti)**
3. la/e configurazioni di equilibrio del sistema **(2 punti)**
4. la qualificazione della stabilità della/e configurazioni di equilibrio trovate al variare di  $\gamma$ ; Posto  $\gamma = \frac{1}{2}$ , si determinino le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile **(4 punti)**.

