

UNIVERSITÀ DI PAVIA  
FACOLTÀ DI INGEGNERIA  
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA INDUSTRIALE  
*Prova scritta di Fisica Matematica*  
4 febbraio 2021

Il *candidato* scriva nello spazio sottostante il proprio Cognome e Nome.

COGNOME

NOME

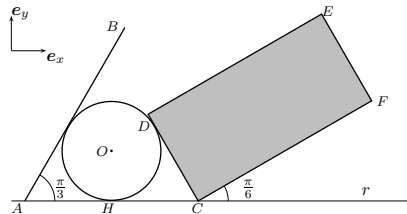
La *prova* consta di **3** Quesiti e durerà **2 ore** e **30 minuti**. *Non è permesso* consultare testi od appunti, al di fuori di quelli distribuiti dalla Commissione.

1. Assegnato il sistema di vettori applicati:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = 3\mathbf{e}_x - 2\mathbf{e}_y + 3\mathbf{e}_z & \text{applicato in } P_1 - O \equiv (2, -1, 3), \\ \mathbf{v}_2 = -2\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z & \text{applicato in } P_2 - O \equiv (-1, 2, -2), \\ \mathbf{v}_3 = 3\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y - 4\mathbf{e}_z & \text{applicato in } P_3 - O \equiv (1, -3, 1) \end{cases}$$

determinarne il risultante (**1** punto); il momento risultante rispetto ad  $O$  (**3** punti); il trinomio invariante (**1** punto); l'equazione dell'asse centrale (**2** punti).

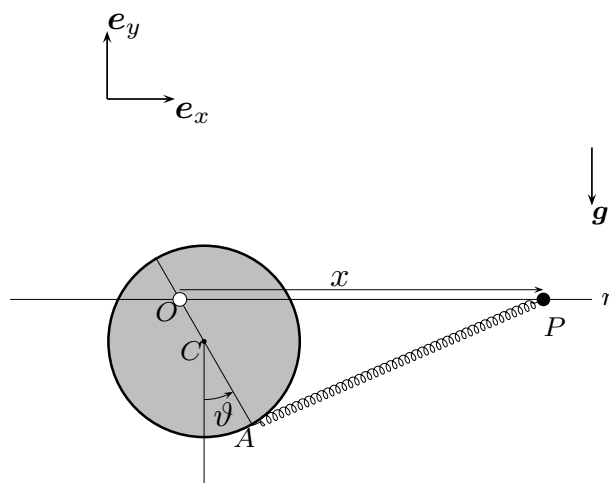
2. Un corpo rigido è formato da un anello di raggio  $R$  e massa  $2m$ , tangente ad una retta orizzontale  $r$ ; da un'asta  $AB$  di massa  $4m$  e lunghezza  $4R$ , appoggiata ad  $r$ , tangente all'anello ed inclinata di  $\frac{\pi}{3}$  sull'orizzontale; da un rettangolo  $CDEF$  di massa  $4m$  e lati  $CD = 2R$  e  $CF = 4R$ , inclinato di un angolo  $\frac{\pi}{6}$  sull'orizzontale. All'istante  $t = 0$  il sistema è nella configurazione indicata in figura con  $\mathbf{v}_O = v_0(2\mathbf{e}_x + 3\sqrt{3}\mathbf{e}_y)$  e  $\mathbf{v}_A = v_0(3\mathbf{e}_x + 2\sqrt{3}\mathbf{e}_y)$ . Determinare: la velocità angolare  $\omega(0)$  del corpo all'istante  $t = 0$  (**2** punti); la



velocità  $\mathbf{v}_C(0)$  del vertice  $C$  del rettangolo all'istante  $t = 0$  (**1** punto); la posizione del centro di istantanea rotazione all'istante  $t = 0$ , rispetto al punto  $O$ , per via analitica (**2** punti); il momento di inerzia di ciascuno dei tre corpi rispetto alla retta passante per il punto  $H$  di contatto tra l'anello e la guida  $r$ , parallela ad  $AB$  (**8** punti).

2

**3.** In un piano verticale, un disco di massa  $4m$  e raggio  $R$  è libero di ruotare intorno ad un proprio punto fisso  $O$  distante  $\frac{R}{2}$  dal centro  $C$ . Sull'orizzontale  $r$  passante per  $O$  è libero di muoversi un punto materiale  $P$  di massa  $2m$ , attratto da una molla ideale di costante elastica  $\gamma \frac{mg}{R}$ , verso il punto  $A$  della circonferenza del disco, posto sullo stesso diametro di  $O$ . Introdotte le coordinate  $x$  e  $\vartheta$  indicate in figura, determinare



le configurazioni di equilibrio ordinarie del sistema, studiandone la stabilità al variare di  $\gamma > 0$  (**6** punti). Posto  $\gamma = \frac{1}{3}$ , trovare l'energia cinetica del sistema (**2** punti). Calcolare le pulsazioni delle piccole oscillazioni intorno alla configurazione di equilibrio stabile. (**2** punti)