Capitolo 4

Dinamica generale e lagrangiana

4.1 Richiami teorici

Dopo aver richiamato la cinematica dei sistemi, passiamo allo studio della loro dinamica, partendo da risultati generali. Sia data un sistema materiale $\mathcal{M}$ formato dai punti materiali (P_i, m_i); sia M la massa complessiva di $\mathcal{M}$ e G il suo centro di massa.

Teorema 4.1 *Sia $\boldsymbol{R}^{(e)}$ il risultante delle forze esterne agenti sul sistema, allora vale la seguente prima equazione cardinale della dinamica:*

$$M\boldsymbol{a}_G = \dot{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{R}^{(e)}, \tag{4.1}$$

dove $\boldsymbol{a}_G$ è l'accelerazione del centro di massa di $\mathcal{M}$ e $\boldsymbol{Q}$ la quantità di moto di $\mathcal{M}$

Come conseguenza della prima equazione cardinale della dinamica, è possibile dimostrare la validità della seguente legge di conservazione

Teorema 4.2 *Se la risultante delle forze esterne agenti su un sistema materiale $\mathcal{M}$ si annulla, allora la quantità di moto di $\mathcal{M}$ si conserva costante nel corso del moto; se invece è solo una componente della risultante delle forze esterne lungo una direzione fissa $\boldsymbol{e}$ ad annullarsi, allora la componente $(\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{e})\boldsymbol{e}$ della quantità di moto lungo $\boldsymbol{e}$ si conserva costante nel corso del moto.*

Teorema 4.3 *Sia $\boldsymbol{M}_O^{(e)}$ il momento risultante delle forze esterne agenti sul sistema rispetto ad un punto O e $\boldsymbol{K}_O$ il momento delle quantità di moto di $\mathcal{M}$ rispetto allo stesso punto, allora vale la seguente seconda equazione cardinale della dinamica:*

$$\dot{\boldsymbol{K}}_O + M\boldsymbol{v}_O \wedge \boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{M}_O^{(e)}, \tag{4.2}$$

dove $\boldsymbol{v}_O$ è la velocità del polo O rispetto al quale sono calcolati i momenti.

Osservazione Quando O ha velocità istantanea nulla oppure coincide con il centro di massa di $\mathcal{M}$ oppure la velocità di O è parallela a quella del centro di massa, allora la (4.2) si riduce alla forma

$$\dot{\boldsymbol{K}}_O = \boldsymbol{M}_O^{(e)}.$$

Teorema 4.4 *Sia O un polo fisso, ovvero coincidente col centro di massa di $\mathcal{M}$. Se $\boldsymbol{M}_O^{(e)} = \boldsymbol{0}$, allora il momento delle quantità di moto di $\mathcal{M}$ rimane costante durante il moto. Se si annulla $\boldsymbol{M}_O^{(e)} \cdot \boldsymbol{e}$, dove $\boldsymbol{e}$ è un versore fisso, allora la componente $\boldsymbol{K}_O \cdot \boldsymbol{e}$ del momento delle quantità di moto di $\mathcal{M}$ rispetto ad O si mantiene costante durante il moto.*

Un altro teorema generale è il teorema dell'energia cinetica per enunciare il quale richiamiamo la definizione di potenza di una forza

Definizione 4.1 *La potenza W di una forza $\boldsymbol{f}$ applicata ad un punto P è lo scalare*

$$W := \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}_P, \tag{4.3}$$

dove $\boldsymbol{v}_P$ è la velocità di P.

Teorema 4.5 *Sia dato un sistema $\mathcal{M}$ di punti materiali e sia T la sua energia cinetica; allora*

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = W \tag{4.4}$$

dove W è la potenza di tutte le forze agenti su $\mathcal{M}$, sia interne che esterne.

Teorema 4.6 *Supponiamo che la potenza di tutte le reazioni vincolari agenti su $\mathcal{M}$ sia nulla e che tutte le forze attive siano conservative e sia V l'energia potenziale corrispondente. Allora l'energia meccanica totale $E := T + V$ si mantiene costante durante il moto.*

4.1.1 Dinamica lagrangiana

Le equazioni di Lagrange sono equazioni *pure* di moto, nel senso che non contengono le reazioni vincolari e si applicano a sistemi olonomi descritti da un numero finito di coordinate lagrangiane $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$. Questa loro caratteristica consente di operare una separazione nei problemi di dinamica, nel senso che con le equazioni di Lagrange si risolve direttamente il problema di moto e poi si possono determinare le reazioni vincolari utilizzando le equazioni di moto newtoniane. Affinché sia possibile operare questa separazione occorre fare un'ipotesi costitutiva, cioè occorre supporre che i vincoli cui è soggetto $\mathcal{M}$ siano *perfetti*,cioè che la potenza virtuale delle reazioni vincolari sia nulla. Sotto questa ipotesi, se T indica l'energia cinetica del sistema $\mathcal{M}$, le equazioni di Lagrange si scrivono come

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = Q_i \tag{4.5}$$

dove la quantità

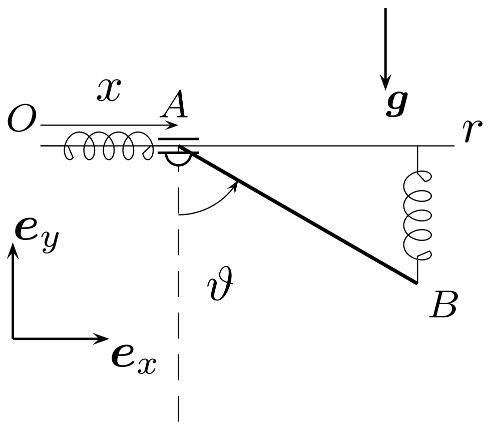
$$Q_i := \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{f}_j \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial q_i}$$

è detta i-esima componente generalizzata delle forze. Se si fa l'ulteriore ipotesi che le forze *attive* siano *conservative* con energia potenziale V e si introduce la funzione *lagrangiana* $L := T - V$, allora è possibile riscrivere le (4.5) nella forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T\boldsymbol{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = 0. \tag{4.6}$$

4.2 Esercizi Risolti

Esercizio 4.1 *In un piano verticale, un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza 2ℓ ha l'estremo A mobile senza attrito su una guida orizzontale r ed attratto verso un punto O fisso sulla stessa guida da una molla ideale di costante elastica $2mg/\ell$. L'altro estremo B è attirato verso r da un'altra molla ideale, di costante elastica $3mg/\ell$, che resta sempre verticale. In funzione delle coordinate x e ϑ indicate in Figura,*



determinare l'energia cinetica del sistema; l'energia potenziale totale del sistema; i valori di $\ddot{\vartheta}(0)$ e $\ddot{x}(0)$ se le condizioni iniziali sono $\vartheta(0) = \frac{\pi}{2}$, $x(0) = \ell$, $\dot{\vartheta}(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$.

L'energia cinetica dell'asta si ottiene dal teorema si König

$$T = \frac{m}{2} v_C^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{I\!I}_C \boldsymbol{\omega}$$

dove C indica il centro di massa di AB, $\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$ è la velocità angolare di AB ed $\mathrm{I\!I}_C$ il tensore centrale di inerzia di AB. Introduciamo il versore $\boldsymbol{e}_1$ diretto come $B - A$

ed il versore $\boldsymbol{e}_2$ ad esso ortogonale, orientato in modo che sia $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_z$. Abbiamo

$$C - O = x\boldsymbol{e}_x + \ell \boldsymbol{e}_1$$

e dunque, grazie alle formule di Poisson,

$$\boldsymbol{v}_C = \dot{x}\boldsymbol{e}_x + \ell\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_2.$$

Abbiamo pertanto

$$v_C^2 = \dot{x}^2 + \ell^2\dot{\vartheta}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta$$

e quindi, poiché $I_{C,\boldsymbol{e}_z} = \boldsymbol{e}_z \cdot \mathbb{I}_C \boldsymbol{e}_z = \frac{m}{3}\ell^2$, abbiamo

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + m\ell\dot{\vartheta}\dot{x}\cos\vartheta.$$

I contributi all'energia potenziale sono dovuti alla molla che richiama A verso O, alla molla che richiama B verso la retta r e alla forza peso e, sommati ordinatamente, danno a V l'espressione

$$V = \frac{mg}{\ell}x^2 + 6mg\ell\cos^2\vartheta - mg\ell\cos\vartheta.$$

Inserite le espressioni di T e V nella lagrangiana $L + T - V$, otteniamo

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2\frac{mg}{\ell}x \quad \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = -m\ell\dot{x}\dot{\vartheta} + 12mg\ell\sin\vartheta\cos\vartheta - mg\ell\sin\vartheta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + m\ell\dot{\vartheta}\cos\vartheta \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{4}{3}m\ell^2\dot{\vartheta} + m\ell\dot{x}\cos\vartheta,$$

da cui si ricava ancora che

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} + m\ell[\ddot{\vartheta}\cos\vartheta - \dot{\vartheta}^2\sin\vartheta]$$

e

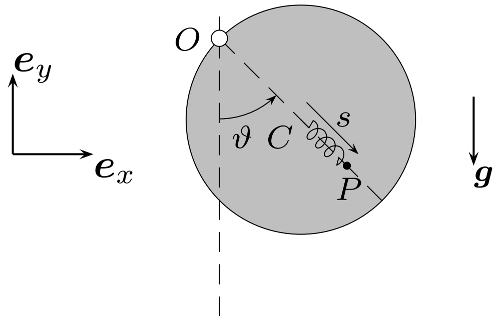
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\vartheta} + m\ell[\ddot{x}\cos\vartheta - \dot{x}\dot{\vartheta}\sin\vartheta].$$

Scritte le equazioni di Lagrange e posto in esse $t = 0$, grazie alle condizioni iniziali descritte nel testo, otteniamo

$$m\ddot{x}(0) = -2mg \qquad \text{e} \qquad \frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\vartheta}(0) = -mg\ell$$

da cui si ottiene

$$\ddot{x}(0) = -2g \qquad \ddot{\vartheta}(0) = -\frac{3g}{4\ell}.$$



Esercizio 4.2 *In un piano verticale, un disco omogeneo di centro C, massa $m/4$ e raggio R è incernierato senza attrito in un punto fisso O della sua circonferenza. Sul diametro passante per O si muove senza attrito un punto materiale P di massa $3m/5$, attratto verso C da una molla ideale di costante elastica $k = 2mg/R$. Trovare le coppie $(\ddot{s}(0), \ddot{\vartheta}(0))$ se all'istante $t = 0$ il moto parte dalle condizioni $s(0) = R/4$, $\vartheta(0) = \pi/2$, $\dot{s}(0) = -\sqrt{gR}$ e $\dot{\vartheta}(0) = 0$. (N.B. L'ascissa s di P è contata a partire da C).*

L'energia cinetica del sistema è formata da due termini, uno relativo al disco e dato da

$$T_D = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{I}_O \boldsymbol{\omega} = \frac{3}{16} m R^2 \dot{\vartheta}^2,$$

dove abbiamo osservato che il punto O è fisso e solidale al disco e che la velocità angolare del disco è $\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$; l'altro termine è relativo al punto P e per calcolarlo introduciamo il versore $\boldsymbol{e}_1 : \frac{P-O}{|P-O|}$ solidale al disco ed il versore $\boldsymbol{e}_2$ che giace nel piano di moto, è ortogonale a $\boldsymbol{e}_1$ ed orientato in modo che $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_z$. Abbiamo allora

$$P - O = (R + s)\boldsymbol{e}_1$$

per cui, grazie alle formule di Poisson,

$$\boldsymbol{v}_P = \dot{s}\boldsymbol{e}_1 + (R + s)\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_2$$

e pertanto l'energia cinetica di P è

$$T_P = \frac{3m}{10}[\dot{s}^2 + (R + s)^2\dot{\vartheta}^2],$$

cosicché

$$T = \frac{3m}{10}\dot{s}^2 + \frac{3}{2}m\dot{\vartheta}^2 \left[\frac{R^2}{8} + \frac{1}{5}(R + s)^2\right]$$

è l'energia cinetica complessiva.

All'energia potenziale V contribuiscono la forza peso agente sul disco e su P e la forza elastica. Presa come quota di riferimento per l'energia potenziale gravitazionale quella del punto fisso O, i contributi del disco e del punto P sono, rispettivamente, $-\frac{mgR}{4}\cos\vartheta$ e $-\frac{3mgR}{5}(R+s)\cos\vartheta$ mentre il contributo della forza elastica è $\frac{mg}{R}s^2$ per cui in definitiva abbiamo

$$V = \frac{mg}{R}s^2 - mg\cos\vartheta\left[\frac{17}{20}R + \frac{3}{5}s\right].$$

Scritta la Lagrangiana $L = T - V$, le equazioni di Lagrange si ottengono osservando che

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = \frac{3}{5}m\dot{s} \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = 3m\dot{\vartheta}\left[\frac{R^2}{8} + \frac{1}{5}(R+s)^2\right],$$

$$\frac{\partial L}{\partial s} = \frac{3}{5}m(R+s)\dot{\vartheta}^2 - \frac{2mg}{R}s + \frac{3}{5}mg\cos\vartheta \qquad \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = -mg\sin\vartheta\left[\frac{17}{20}R + \frac{3}{5}s\right]$$

e sono date da

$$\begin{cases} \ddot{s} = (R+s)\dot{\vartheta}^2 - \frac{10g}{3R}s + g\cos\vartheta \\ \left[\frac{5}{8}R^2 + (R+s)^2\right]\ddot{\vartheta} + \frac{2}{5}(R+s)\dot{s}\dot{\vartheta} = -g\sin\vartheta\left[\frac{17}{12}R + s\right]. \end{cases}$$

Se inseriamo le condizioni iniziali proposte, ricaviamo

$$\ddot{s}(0) = -\frac{5g}{6} \qquad \text{e} \qquad \ddot{\vartheta}(0) = -\frac{16g}{21R}.$$

Esercizio 4.3 *In un piano verticale, un disco omogeneo di massa m e raggio R rotola senza strisciare su una guida orizzontale ed ha il centro C attratto verso un punto O fisso ed alla sua stessa quota da una molla ideale di costante elastica mg/R. Lungo un diametro AB del disco è mobile un punto materiale P di massa $2m$ attratto verso C da una molla ideale di costante elastica $3mg/R$. Introdotte le coordinate s e ϑ indicate in*

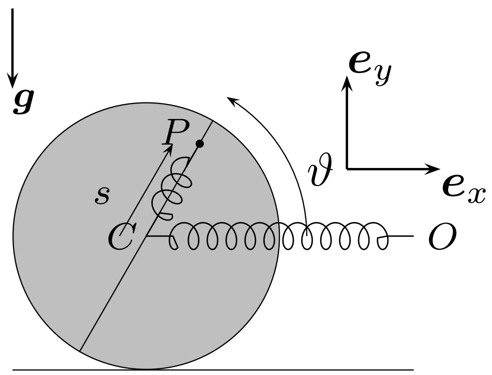


figura e supponendo che $\vartheta = 0$ quando C è sovrapposto ad O, determinare l'espressione *dell'energia cinetica totale T, dell'energia potenziale totale V del sistema ed il valore di $\ddot{\vartheta}(0)$ e $\ddot{s}(0)$ se all'istante iniziale il sistema parte in quiete dalla configurazione $\vartheta(0) = 0$, $s(0) = \frac{R}{2}$, $\dot{\vartheta}(0) = 0$ $\dot{s}(0) = 0$.*

Il legame tra s e ϑ descritto nel testo impone che sia $|C - O| = R\vartheta$. Grazie al vincolo di puro rotolamento, l'energia cinetica del disco si riduce a $\frac{3}{4}mR^2\dot{\vartheta}^2$, dove abbiamo osservato che, grazie al teorema di Huygens-Steiner il momento di inerzia del disco rispetto al punto di contatto con la guida è $\frac{3}{2}mR^2$. Consideriamo ora il punto P il cui vettore posizione rispetto ad O è dato da

$$P - O = -R\vartheta\boldsymbol{e}_x + s\boldsymbol{e}_1$$

dove $\boldsymbol{e}_1 = \frac{P-C}{|P-C|}$. Se $\boldsymbol{e}_2$ è un altro versore solidale alla lamina, ortogonale ad $\boldsymbol{e}_1$ e tale che $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_z$, grazie alle formule di Poisson otteniamo

$$\boldsymbol{v}_P = -R\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_x + \dot{s}\boldsymbol{e}_1 + s\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_2$$

e quindi

$$T_p = mv_P^2 = m[R^2\dot{\vartheta}^2 + \dot{s}^2 + s^2\dot{\vartheta}^2 - 2R\dot{\vartheta}\dot{s}\cos\vartheta + 2sR\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta],$$

siccome $\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_1 = \cos\vartheta$ e $\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_2 = \cos(\frac{\pi}{2} + \vartheta) = -\sin\vartheta$. L'energia cinetica complessiva è allora

$$T = \frac{7}{4}mR^2\dot{\vartheta}^2 + m[\dot{s}^2 + s^2\dot{\vartheta}^2 - 2R\dot{\vartheta}\dot{s}\cos\vartheta + 2sR\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta].$$

L'energia potenziale consta di tre termini non costanti: $2mgs\sin\vartheta$ relativo alla forza peso agente su P, $\frac{3mg}{2R}s^2$, corrispondente alla molla PC e $\frac{mg}{2R}|C-O|^2 = \frac{1}{2}mgR\vartheta^2$, relativo alla molla CO. In definitiva

$$V = 2mgs\sin\vartheta + \frac{3mg}{2R}s^2 + \frac{1}{2}mgR\vartheta^2.$$

Per rispondere all'ultimo quesito, scriviamo le equazioni di Lagrange a partire dalla Lagrangiana $L = T - V$ da cui otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(2m\dot{s} - 2mR\dot{\vartheta}\cos\vartheta\Big) = 2m[\ddot{s} - R\ddot{\vartheta}\cos\vartheta + R\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta],$$

$$\frac{\partial L}{\partial s} = 2m[s\dot{\vartheta}^2 + R\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta - g\sin\vartheta] - \frac{3mg}{R}s,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{7}{2}mR^2\dot{\vartheta} + 2m(s^2\dot{\vartheta} - R\dot{s}\cos\vartheta + 2Rs\dot{\vartheta}\sin\vartheta)\Big] =$$

$$\frac{7}{2}mR^2\ddot{\vartheta} + 2m[2s\dot{s}\dot{\vartheta} + s^2\ddot{\vartheta} - R\ddot{s}\cos\vartheta + R\dot{s}\dot{\vartheta}\sin\vartheta + 2R(\dot{s}\dot{\vartheta}\sin\vartheta + s\ddot{\vartheta}\sin\vartheta + \dot{s}\dot{\vartheta}^2\cos\vartheta)]$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 2m[R\dot{s}\dot{\vartheta}\sin\vartheta + Rs\dot{\vartheta}^2\cos\vartheta - 2mgs\cos\vartheta - \frac{1}{2}gR\vartheta]:$$

Inserite le condizioni iniziali nelle equazioni di Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = \frac{\partial L}{\partial s} \qquad \text{e} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{\partial L}{\partial \vartheta},$$

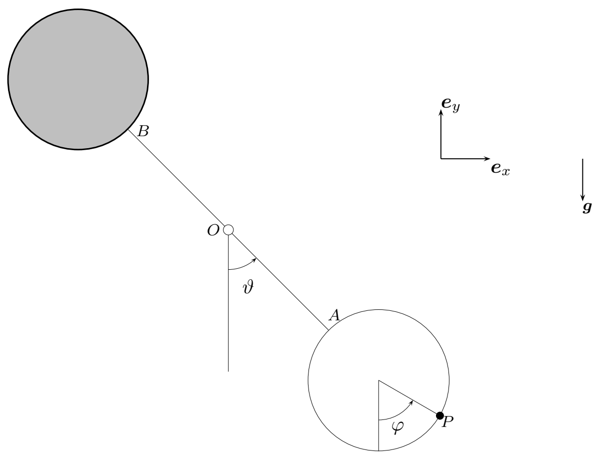
otteniamo

$$\begin{cases} \ddot{s}(0) - R\ddot{\vartheta}(0) = -\frac{3}{4}g \\ \\ -2\ddot{s}(0) + 4R\ddot{\vartheta}(0) = -g \end{cases}$$

e quindi, risolvendo,

$$\ddot{s}(0) = -2g \qquad \ddot{\vartheta}(0) = -\frac{5}{4}\frac{g}{R}.$$

Esercizio 4.4 *In un piano verticale, un disco di massa $2m$ e raggio R è saldato all'estremo B di un'asta AB di lunghezza $4R$ e massa trascurabile avente a sua volta il centro O incernierato ad un punto fisso. All'estremo A dell'asta è incernierato un punto di un anello di raggio R e massa trascurabile lungo cui è libero di muoversi il punto materiale P di massa m. Introdotte le coordinate ϑ e φ indicate in figura si scrivano le equazioni di Lagrange del sistema. Infine, si trovino $\ddot{\vartheta}(0)$ e $\ddot{\varphi}(0)$ se il sistema parte dalla quiete all'istante $t = 0$ nella configurazione dove $\vartheta = \pi/2$ e $\varphi = \pi$.*



La lagrangiana del sistema $L = T - V$ si può introdurre in quanto i vincoli sono olonomi, perfetti e le forze attive, che si riducono alla forza peso, sono conservative. L'energia cinetica T è data di

$$T = T_{\mathcal{D}} + T_P,$$

dove il primo contributo si riferiscse al disco, il secondo al punto P. Per calcolare $T_{\mathcal{D}}$, osserviamo che il centro G del disco $\mathcal{D}$ descrive nel moto, con velocità angolare $\dot\vartheta \boldsymbol{e}_z$ una circonferenza di centro O e raggio $3R$ per cui, grazie al teorema di König, se osserviamo che $\dot\vartheta \boldsymbol{e}_z$ è anche la velocità angolare del disco, abbiamo

$$T_{\mathcal{D}} = 9mR^2\dot\vartheta^2 + \frac{1}{2}\dot\vartheta^2 I_{G,\boldsymbol{e}_z} = \frac{19}{2}mR^2\dot\vartheta^2.$$

Per calcolare il contributo di P all'energia cinetica, introduciamo il versore $\boldsymbol{e}_1$ diretto come $A-O$ ed il versore $\boldsymbol{e}_2$ ortogonale al primo, diretto in modo che sia $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_z$; inoltre, detto C il centro dell'anello, introduciamo il versore $\boldsymbol{e}_3$, diretto come $P-C$ ed il versore $\boldsymbol{e}_4$ tale che $\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{e}_z$. Abbiamo allora

$$P - O = 3R\boldsymbol{e}_1 + R\boldsymbol{e}_3$$

e siccome $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ ruotano con velocità angolare $\dot\vartheta\boldsymbol{e}_z$ mentre $\{\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ ruotano con velocità angolare $\dot\varphi\boldsymbol{e}_z$, grazie alle formule di Poisson si ha

$$\boldsymbol{v}_P = 3R\dot\vartheta\boldsymbol{e}_2 + R\dot\varphi\boldsymbol{e}_4$$

per cui

$$\boldsymbol{v}_P^2 = 9R^2\dot\vartheta^2 + R^2\dot\varphi^2 + 6R^2\dot\vartheta\dot\varphi\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_4$$

e dunque, osservando che $\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_4 = \cos(\varphi-\vartheta)$, abbiamo

$$T_P = \frac{1}{2}mR^2[\dot\vartheta^2 + 9\dot\varphi^2 + 6\dot\vartheta\varphi\cos(\varphi-\vartheta)]$$

e dunque

$$T = mR^2[10\dot\vartheta^2 + \frac{9}{2}\dot\varphi^2 + 3\dot\vartheta\varphi\cos(\varphi-\vartheta)].$$

All'energia potenziale V contribuiscono la forza peso agente sul disco e su P: in sostanza si ha

$$V = 6mgR\cos\vartheta - mgR(3\cos\vartheta + \cos\varphi) = 3mgR\cos\vartheta - mgR\cos\varphi$$

e dunque

$$L = mR^2[10\dot\vartheta^2 + \frac{9}{2}\dot\varphi^2 + 3\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\varphi-\vartheta)] - 3mgR\cos\vartheta + mgR\cos\varphi.$$

Le equazioni di moto di Lagrange sono

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\vartheta}\right) = \left(\frac{\partial L}{\partial\vartheta}\right) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}\right) = \left(\frac{\partial L}{\partial\varphi}\right)$$

ovvero

$$mR^2[20\ddot\vartheta + 3\ddot\varphi\cos(\varphi-\vartheta) - 3\dot\varphi(\dot\varphi-\dot\vartheta)\sin(\varphi-\vartheta)] = 3mR^2\dot\vartheta\dot\varphi\sin(\varphi-\vartheta) + 3mgR\sin\vartheta$$

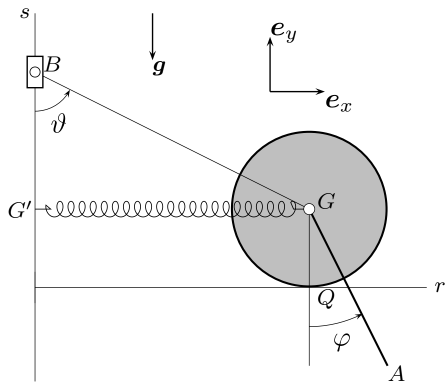
e

$$mR^2[9\ddot{\varphi} + 3\ddot{\vartheta}\cos(\varphi - \vartheta) - 3\dot{\vartheta}(\dot{\vartheta} - \dot{\varphi})\sin(\varphi - \vartheta)] = 3mR^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\sin(\varphi - \vartheta) - mgR\sin\varphi.$$

Inserendo i valori proposti per ϑ e φ all'istante $t = 0$ ed osservando che la condizione di quiete da cui il sistema viene rilasciato equivale a richiedere $\dot{\vartheta}(0) = \dot{\varphi}(0)$, abbiamo

$$\begin{cases} \ddot{\vartheta}(0) = \frac{3}{20}\frac{g}{R} \\ \ddot{\varphi}(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4.5 *In un piano verticale, un disco omogeneo di massa $2m$ e raggio ℓ è libero di rotolare senza strisciare su una guida orizzontale r. Al suo centro G sono vincolati gli estremi di due aste AG e BG, la prima di lunghezza 2ℓ e massa m, la seconda di massa trascurabile e lunghezza 4ℓ. L'estremo B di BG è vincolato a scorrere su una guida verticale s, mentre AG è libera di ruotare attorno all'asse $\boldsymbol{e}_z$ passante per G (vedi figura). Infine, G è attratto verso il punto $G' \in s$ posto alla stessa quota da una molla ideale di costante elastica $k = 2mg/\ell$. Introdotte le coordinate*



generalizzate ϑ e φ indicate in figura, determinare: l'energia cinetica del disco e di AG; l'energia potenziale totale del sistema; i valori di $\ddot{\vartheta}(0)$ e $\ddot{\varphi}(0)$ se le condizioni iniziali sono $\vartheta(0) = \varphi(0) = \frac{\pi}{4}$, $\dot{\vartheta} = \dot{\varphi} = 0$

La velocità angolare del disco $\omega\boldsymbol{e}_z$ si ricava osservando che, da una parte, essendo $G - G' = 4\ell\sin\vartheta\boldsymbol{e}_x$, si ha

$$\boldsymbol{v}_G = 4\ell\dot{\vartheta}\cos\vartheta\boldsymbol{e}_x.$$

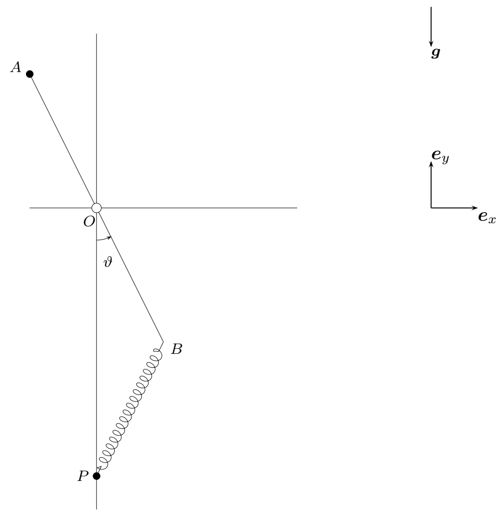
D'altra parte, imponendo il vincolo di puro rotolamento si ha

$$\boldsymbol{v}_G = \omega\boldsymbol{e}_z \wedge \ell\boldsymbol{e}_y = -\omega\ell\boldsymbol{e}_x$$

da cui segue
$$\boldsymbol{\omega} = -4\dot{\vartheta}\cos\vartheta\boldsymbol{e}_z.$$
Siccome la velocità istantanea del punto Q del disco a contatto con la guida è nulla per il vincolo di puro rotolamento, applicando i teoremi di König e di Huygens-Steiner si ottiene
$$T_d = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot \mathbb{I}_Q\boldsymbol{\omega} = 24m\ell^2\dot{\vartheta}^2\cos^2\vartheta.$$
Indichiamo con M il centro di massa dell'asta AG, abbiamo
$$M - G' = G - G' + M - G = 4\ell\sin\vartheta\boldsymbol{e}_x + \ell\boldsymbol{e}_1$$
dove $\boldsymbol{e}_1 = \frac{A-G}{|A-G|}$ è il versore diretto lungo l'asta, orientato da G ad A. Derivando rispetto al tempo e ricordando che l'asta ruota con velocità angolare $\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_z$, grazie alle formule di Poisson si ottiene
$$\boldsymbol{v}_M = 4\ell\dot{\vartheta}\cos\vartheta\boldsymbol{e}_x + \ell\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_2,$$
dove $\boldsymbol{e}_2$ è il versore del piano di moto, ortogonale ad $\boldsymbol{e}_1$ e tale che $\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_z$. Elevando al quadrato, osservando che $\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_2 = \cos\varphi$ ed applicando il teorema di König ricaviamo
$$T_{AG} = 8m\ell^2\dot{\vartheta}^2\cos^2\vartheta + \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + 4m\ell^2\cos\varphi\cos\vartheta\dot{\vartheta}\dot{\varphi}.$$

Quanto all'energia potenziale, fissata come quota di riferimento l'orizzontale per G, per il contributo gravitazionale abbiamo
$$V = 16mg\ell\sin^2\vartheta - mg\ell\cos\varphi.$$
Possiamo dunque scrivere la lagrangiana
$$L = 32m\ell^2\dot{\vartheta}^2\cos^2\vartheta + \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + 4m\ell^2\cos\varphi\cos\vartheta\dot{\vartheta}\dot{\varphi} - 16mg\ell\sin^2\vartheta + mg\ell\cos\varphi$$
da cui ricavare le equazioni di moto
$$\begin{cases} 64m\ell^2(\ddot{\vartheta}\cos^2\vartheta - \dot{\vartheta}^2\sin\vartheta\cos\vartheta) + 4m\ell^2[\cos\varphi\cos\vartheta\ddot{\varphi} - \sin\varphi\cos\vartheta\dot{\varphi}^2] = -32mg\ell\sin\vartheta\cos\vartheta \\ \\ \frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\varphi} + 4m\ell^2[\cos\varphi\cos\vartheta\ddot{\vartheta} - \sin\vartheta\cos\varphi\dot{\vartheta}^2] = -mg\ell\sin\varphi \end{cases}$$
che, imponendo le condizioni iniziali diventano
$$\begin{cases} 16\ell\ddot{\vartheta}(0) + \ell\ddot{\varphi}(0) = -8g \\ \\ 2\ell\ddot{\vartheta}(0) + \frac{4}{3}\ell\ddot{\varphi}(0) = -g\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$
da cui ricaviamo
$$\ddot{\vartheta}(0) = -\frac{1}{58}(3\sqrt{2}+64)\frac{g}{\ell} \qquad \text{e} \qquad \ddot{\varphi} = \frac{4}{29}(\sqrt{2}+2)\frac{g}{\ell}$$

Esercizio 4.6 *In un piano verticale, un punto materiale A di massa αm è saldato all'estremità di un'asta AB di lunghezza 2ℓ e massa trascurabile, vincolata a ruotare senza attrito attorno al suo punto medio fissato in O senza attrito. L'estremo B è poi attratto da una molla ideale di costante elastica mg/ℓ verso un punto materiale P di massa $3m$, libero di muoversi su una guida verticale passante per O. Introdotte le coordinate y e ϑ, con y ordinata di P rispetto ad O nella direzione $\boldsymbol{e}_y$ Determinare le configurazioni di equilibrio in funzione di α, studiando la stabilità delle configurazioni con l'asta lungo la verticale. Preso $\alpha = 1$, scrivere le equazioni di Lagrange e determare i valori di $\ddot{y}(0)$ e $\ddot{\vartheta}(0)$ sapendo che, all'istante $t = 0$ il sistema parte dalla quiete con $y(0) = 0$, $\vartheta(0) = \frac{\pi}{2}$.*



Rispetto ad un riferimento cartesiano ortogonale con origine in O ed assi orientati lungo $\boldsymbol{e}_x$ ed $\boldsymbol{e}_y$, le coordinate di B sono $B \equiv (\ell \sin\vartheta, -\ell\cos\vartheta)$, mentre quelle di P sono $P \equiv (0, y)$ per cui

$$|P - B|^2 = \ell^2 \sin^2\vartheta + (y + \ell\cos\vartheta)^2 = y^2 + \ell^2 + 2\ell y \cos\vartheta$$

e quindi l'energia potenziale del sistema è

$$V = \alpha m g \ell \cos\vartheta + 3mgy + \frac{mg}{2\ell}[y^2 + \ell^2 + 2\ell y\cos\vartheta].$$

Le configurazioni di equilibrio risolvono il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = -mg\sin\vartheta(\alpha\ell + y) = 0 \\ \\ \frac{\partial V}{\partial y} = 3mg + \frac{mg}{\ell}[y + \ell\cos\vartheta] = 0 : \end{cases}$$

La prima equazione è verificata dai valori $\vartheta = \vartheta_1 = 0$ e $\vartheta = \vartheta_2 = \pi$ che, inseriti nella seconda equazione, forniscono i corrispondenti valori di $y = y_1 = -4\ell$ ed $y =$

$y_2 = -2\ell$. La prima equazione può essere soddisfatta anche da $y = y_3 = -\alpha\ell$ cui corrisponde, dalla seconda equazione il valore ϑ tale che

$$\cos\vartheta = \alpha - 3.$$

Si hanno due regimi: se $\alpha > 4$ oppure $\alpha < 2$, quest'ultima equazione non è verificata da alcun valore ϑ e dunque si hanno le sole configurazioni di equilibrio $E_1 \equiv (\vartheta_1, y_1)$ ed $E_2 \equiv (\vartheta_2, y_2)$ mentre, se $\alpha \in (2, 4)$, si hanno le configurazioni $E_3 \equiv (\vartheta_3, y_3)$ ed $E_4 \equiv (2\pi - \vartheta_3, y_3)$, dove $\cos\vartheta_3 = \alpha - 3$. Per discriminare la stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate, determiniamo la matrice hessiana B di V. Abbiamo

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2} = -mg\cos\vartheta(\alpha\ell + y), \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta\partial y} = -mg\sin\vartheta \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{mg}{\ell}$$

e quindi

$$B(E_1) = \begin{pmatrix} mg\ell(4-\alpha) & 0 \\ 0 & \frac{mg}{\ell} \end{pmatrix} \qquad B(E_2) = \begin{pmatrix} mg\ell(\alpha-2) & 0 \\ 0 & \frac{mg}{\ell} \end{pmatrix}$$

$$B(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & -mg\sqrt{1-\cos^2\vartheta_3} \\ -mg\sqrt{1-\cos^2\vartheta_3} & \frac{mg}{\ell} \end{pmatrix}$$

$$B(E_4) = \begin{pmatrix} 0 & mg\sqrt{1-\cos^2\vartheta_3} \\ mg\sqrt{1-\cos^2\vartheta_3} & \frac{mg}{\ell} \end{pmatrix}$$

dove abbiamo osservato che $\vartheta_3 \in [0, \pi]$, per cui $\sin\vartheta_3 = \sqrt{1-\cos^2\vartheta_3}$, mentre $2\pi - \vartheta_3 \in [\pi, 2\pi]$ e quindi $\sin(2\pi - \vartheta_3) = -\sqrt{1-\cos^2\vartheta_3}$. Vediamo allora che $B(E_1)$ ha autovalori positivi se $\alpha < 4$ mentre ne ha uno positivo ed uno negativo quando $\alpha > 4$: nel primo caso E_1 corrisponde ad un minimo relativo isolato per V ed è dunque stabile, nel secondo essa corrisponde ad un punto di sella e dunque è instabile. D'altra parte $B(E_2)$ ha autovalori positivi se $\alpha > 2$ mentre ne ha uno positivo ed uno negativo quando $\alpha < 2$: nel primo caso E_2 corrisponde ad un minimo relativo isolato per V ed è dunque stabile, nel secondo essa corrisponde ad un punto di sella e dunque è instabile. Infine, sia $B(E_3)$ che $B(E_4)$ hanno autovalori di segno discorde, visto che il loro determinante è negativo, per cui corrispondono sempre a punti di sella per V: quando esistono, le configurazioni di equilibrio E_3 ed E_4 sono sempre instabili.

Consideriamo ora il caso $\alpha = 1$, nel quale l'energia potenziale è

$$V = mg\ell\cos\vartheta + 3mgy + \frac{mg}{2\ell}[y^2 + \ell^2 + 2\ell y\cos\vartheta].$$

Poiché A si muove lungo una circonferenza di centro O e raggio 2ℓ ed il raggio vettore $A - O$ ruota con velocità angolare $\dot\vartheta \boldsymbol{e}_z$, l'energia cinetica di A è $2m\ell^2\dot\vartheta^2$, mentre quella di P è $\frac{3}{2}m\dot y^2$ per cui l'energia cinetica del sistema è

$$T = 2m\ell^2\dot\vartheta^2 + \frac{3}{2}m\dot y^2$$

e la lagrangiana L risulta

$$L = 2m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{3}{2}m\dot{y}^2 - mg\ell\cos\vartheta - 3mgy - \frac{mg}{2\ell}[y^2 + \ell^2 + 2\ell y\cos\vartheta].$$

Le equazioni di Lagrange sono allora

$$4m\ell^2\ddot{\vartheta} = mg\ell\sin\vartheta + mgy\sin\vartheta$$

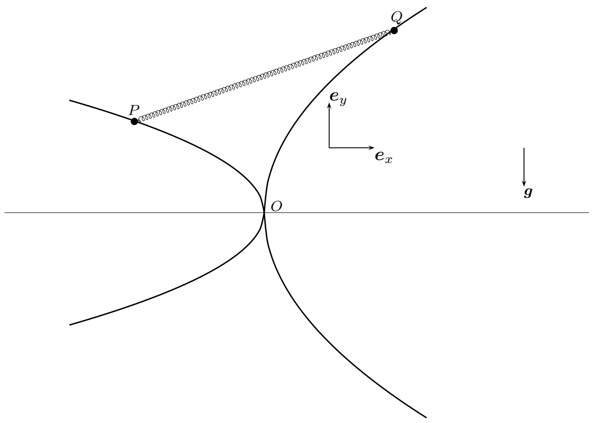
e

$$3m\ddot{y} = -3mg - \frac{mg}{\ell}y - mg\cos\vartheta$$

ed inserendovi le condizioni iniziali proposte nel testo, si ottiene

$$\ddot{\vartheta}(0) = \frac{g}{4\ell} \qquad \ddot{y}(0) = -g.$$

Esercizio 4.7 *In un piano verticale, due punti materiali P e Q, di masse m e $2m$ sono vincolati, rispettivamente, a muoversi lungo le parabole $x = -y^2/\ell$ e $x = 2y^2/\ell$. I punti si attraggono con una forza elastica ideale di costante $k = \frac{mg}{\ell}$. Dette y e η le ordinate di P e Q, determinare l'energia cinetica e quella potenziale del sistema. Supponendo che all'istante $t = 0$ i punti siano in quiete con $y(0) = \eta(0) = \ell$,*



determinare $\ddot{y}(0)$ e $\ddot{\eta}(0)$.

Possiamo scrivere i vettori posizione dei punti materiali come

$$P - O = -\frac{y^2}{\ell}\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y \qquad Q - O = \frac{2\eta^2}{\ell}\boldsymbol{e}_x + \eta\boldsymbol{e}_y$$

da cui, derivando rispetto al tempo, si ottengono le loro velocità

$$\boldsymbol{v}_P = \dot{y}\left(\frac{2y}{\ell}\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y\right) \qquad \boldsymbol{v}_Q = \dot{\eta}\left(\frac{4\eta}{\ell}\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y\right)$$

per cui l'energia cinetica è data da

$$T = \frac{m}{2}v_P^2 + mv_Q^2 = \frac{m}{2}\dot{y}^2\left(1 + \frac{4y^2}{\ell^2}\right) + m\dot{\eta}^2\left(1 + \frac{16\eta^2}{\ell^2}\right).$$

All'energia potenziale contribuisco la forza peso di entrambi i punti e la forza elastica, per un contributo complessivo dato da

$$V = mgy + 2mg\eta + \frac{mg}{2\ell}|P - Q|^2 = mgy + 2mg\eta + \frac{mg}{2\ell}\left[(y-\eta)^2 + \frac{1}{\ell^2}\left(2\eta^2 + y^2\right)^2\right].$$

Introdotta la lagrangiana $L = T - V$, per scrivere le equazioni di Lagrange dobbiamo calcolare

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\left[\frac{4y^2}{\ell^2} + 1\right]\dot{y}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} = 2m\left[\frac{16\eta^2}{\ell^2} + 1\right]\dot{\eta},$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{4m}{\ell^2}y\dot{y}^2 - mg - \frac{mg}{2\ell}\left[2(y-\eta) + \frac{4}{\ell^2}(2\eta^2 + y^2)y\right]$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \eta} = \frac{32m}{\ell^2}\eta\dot{\eta}^2 - 2mg - \frac{mg}{2\ell}\left[-2(y-\eta) + \frac{8}{\ell^2}(2\eta^2 + y^2)\eta\right].$$

In questo modo, le equazioni di Lagrange si scrivono come

$$m\ddot{y}\left[\frac{4y^2}{\ell^2} + 1\right] + \frac{8m}{\ell^2}y\dot{y}^2 = \frac{\partial L}{\partial y}$$

e

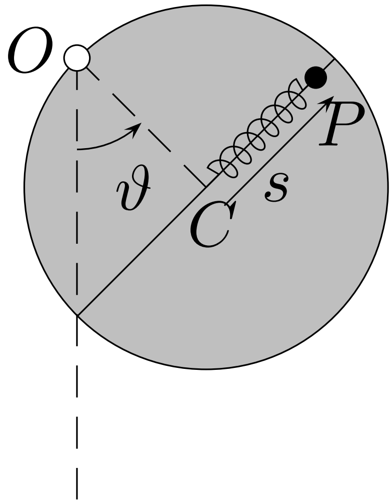
$$2m\ddot{\eta}\left[\frac{16\eta^2}{\ell^2} + 1\right] + \frac{64m}{\ell^2}\eta\dot{\eta}^2 == \frac{\partial L}{\partial \eta}.$$

Queste equazioni sono valide per $t \geq 0$ e, posto $t = 0$ e considerate le condizioni iniziali proposte, in cui $\dot{y}(0) = \dot{\eta}(0) = 0$, abbiamo

$$\begin{cases} 5m\ddot{y}(0) = -7mg \\ \\ 32m\ddot{\eta}(0) = -14mg \end{cases}$$

da cui ricaviamo che $\ddot{y}(0) = -\frac{7}{5}g$ e $\ddot{\eta}(0) = -\frac{7}{16}g$.

Esercizio 4.8 *In un piano* **orizzontale** *un disco di raggio R e massa $2m$ è incernierato senza attrito in un punto O della sua circonferenza. Sul diametro ortogonale a quello passante per O è praticata una scanalatura nella quale è libero di muoversi senza attrito un punto materiale P di massa m, attratto verso il centro C del disco da una molla ideale di costante elastica k. Introdotte le coordinate s e ϑ descritte in figura, si trovino due integrali primi del moto, e si determinino la velocità di P quando transita per C e la velocità angolare del disco al medesimo istante, sapendo che all'istante iniziale il sistema è in quiete con P sul bordo del disco.*



Siccome il piano di moto è orizzontale, la gravità non è efficace e le forze esterne si riducono alla reazione di cerniera in O. Le forze attive (interne) si riducono alla forza elastica, che è conservativa. Supponendo i vincoli perfetti, concludiamo che l'energia meccanica $E = T + V$ del sistema si conserva. Inoltre, poiché tutte le forze esterne hanno momento nullo rispetto ad O, la componente del momento delle quantià di moto del sistema lungo $\boldsymbol{e}_z$, la sola a priori non nulla è costante. La velocità angolare del disco è $\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$ per cui il contributo all'energia cinetica del disco è

$$T_d = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{I}_O \boldsymbol{\omega} = \frac{m}{2}\dot{\vartheta}^2 I_{O,\boldsymbol{e}_z} = \frac{3m}{2}R^2\dot{\vartheta}^2,$$

dove abbiamo usato il teorema di Huygens-Steiner per il calcolo del momento di inerzia $I_{O,\boldsymbol{e}_z}$ del disco rispetto all'asse passante per il punto fisso O, diretto lungo $\boldsymbol{e}_z$. Per determinare il contributo T_P di P all'energia cinetica, introduciamo la base ortonormale $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, solidale al disco e formata da $\boldsymbol{e}_1 = \frac{C-O}{|C-O|}$ e $\boldsymbol{e}_2 = \frac{P-C}{|P-C|}$, cosicché $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_z$. Abbiamo allora

$$P - O = R\boldsymbol{e}_1 + s\boldsymbol{e}_2$$

e di conseguenza, grazie alle formule di Poisson,

$$\boldsymbol{v}_P = -s\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_1 + (R\dot{\vartheta} + \dot{s})\boldsymbol{e}_2\,,$$

da cui ricaviamo

$$T_P = \frac{m}{2}[s^2\dot{\vartheta}^2 + (R\dot{\vartheta} + \dot{s})^2].$$

Sommando i contributi ottenuti, otteniamo per l'energia cinetica complessiva T

$$T = 2mR^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{m}{2}[s^2\dot{\vartheta}^2 + 2R\dot{\vartheta}\dot{s} + \dot{s}^2].$$

L'energia potenziale V si riduce al solo contributo della forza elastica e vale $V = \frac{k}{2}s^2$ per cui l'energia meccanica totale E è

$$E = T + V = 2mR^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{m}{2}[s^2\dot{\vartheta}^2 + 2R\dot{\vartheta}\dot{s} + \dot{s}^2] + \frac{k}{2}s^2.$$

Il valore della costante E si ricava sostituendo le condizioni iniziali nelle espressioni di T e V. Dai dati del testo sappiamo che $s(0) = \pm R$ e che $\dot{s}(0) = 0$ e $\dot{\vartheta}(0)$ per cui

$$2mR^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{m}{2}[s^2\dot{\vartheta}^2 + 2R\dot{\vartheta}\dot{s} + \dot{s}^2] + \frac{k}{2}s^2 = \frac{k}{2}R^2,$$

che non risente dell'interminazione sul segno di $s(0)$. Occorre ora richiedere che abbia valore costante la componente lungo $\boldsymbol{e}_z$ del momento delle quantità di moto $\boldsymbol{K}_O$ rispetto al polo O. Il contributo del disco a $\boldsymbol{K}_O$ è

$$\boldsymbol{K}_O^d = \mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega} = 3mR^2\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z,$$

dove abbiamo ancora impiegato il teorema di Huygens-Steiner. Il contributo del punto P è

$$\boldsymbol{K}_O^P = m(P - O) \wedge \boldsymbol{v}_P = m[R(R\dot{\vartheta} + \dot{s}) + s^2\dot{\vartheta}]\boldsymbol{e}_z$$

per cui la componente lungo $\boldsymbol{e}_z$ di $\boldsymbol{K}_O$ è

$$3mR^2\dot{\vartheta} + m[R(R\dot{\vartheta} + \dot{s}) + s^2\dot{\vartheta}] = K$$

dove, per trovare il valore costante di K, basta imporre le condizioni iniziali, da cui si ricava subito $K = 0$. I due integrali primi del moto sono dunque

$$\begin{cases} 2mR^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{m}{2}[s^2\dot{\vartheta}^2 + 2R\dot{\vartheta}\dot{s} + \dot{s}^2] + \frac{k}{2}s^2 = \frac{k}{2}R^2 \\ \\ 4mR^2\dot{\vartheta} + m[\dot{s}) + s^2\dot{\vartheta}] = 0. \end{cases}$$

Queste equazioni debbono valere in tutti gli istanti in cui avviene il moto. In particolare, all'istante $t = t_1$ in cui P passa per C, si ha $s = 0$ e dunque il sistema appena trovato diventa

$$\begin{cases} 2mR^2\dot{\vartheta}^2(t_1) + \frac{m}{2}[2R\dot{\vartheta}\dot{s}(t_1) + \dot{s}^2(t_1)] = \frac{k}{2}R^2 \\ \\ 4R\dot{\vartheta}(t_1) + \dot{s}(t_1) = 0: \end{cases}$$

dalla seconda otteniamo

$$\dot{s}(t_1) = -4R\dot{\vartheta}(t_1)$$

che, sostituita nella prima equazione, fornisce

$$\dot{\vartheta}^2(t_1) = \frac{k}{12m}$$

ovvero i valori $\dot{\vartheta}(t_1) = \pm\sqrt{\frac{k}{12m}}$ per la velocità angolare del disco, da cui si ottiene

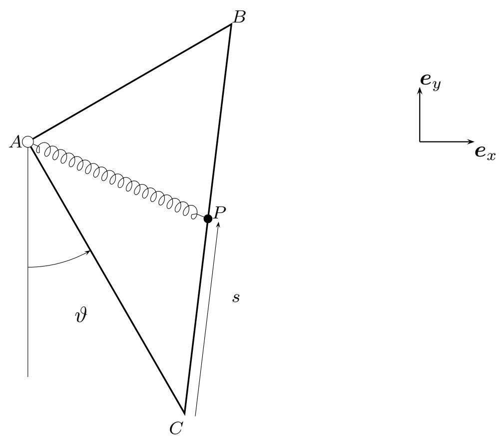
$$\dot{s}(t_1) = \mp 4R\sqrt{\frac{k}{12m}}\,:$$

la velocità di P all'istante $t = t_1$ è allora

$$\boldsymbol{v}_P(t_1) = \mp 3R\sqrt{\frac{k}{12m}}\boldsymbol{e}_2\,.$$

Se a $t = 0$ si aveva $s(0) = R$, allora occorre prendere $s(t_1) < 0$ e quindi $\vartheta(t_1) > 0$ mentre se si aveva $s(0) = -R$, i segni sarebbero stati invertiti.

Esercizio 4.9 *In un piano* **orizzontale***, è libero di ruotare senza attrito—attorno ad una cerniera collocata nel vertice A—un telaio ABC formato da tre aste: AB, di lunghezza 3ℓ e massa m, AC, di lunghezza 4ℓ e massa $6m$ e BC, di lunghezza 5ℓ e massa $3m$. Su BC è libero di muoversi senza attrito un punto materiale P di massa $2m$, sollecitato da una forza elastica di costante k che lo richiama verso A. Servendosi delle coordinate s e ϑ indicate in figura determinare due integrali primi*



del moto discutendone il significato fisico. Supponendo che all'istante $t = 0$ il sistema parta dalla quiete con $\vartheta(0) = 0$ ed $s(0) = \ell$, si determini la velocità angolare della lamina quando P passa per il punto medio di BC.

Il telaio forma un unico corpo rigido che ruota con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$. Osserviamo che, poiché siamo in assenza di attrito e la sola forza attiva presente è conservativa, si conserva il valore E dell'energia meccanica del sistema. Inoltre, poiché la sola forza attiva sul sistema nel piano di moto è la reazione vincolare in A il cui momento è nullo rispetto ad A, per la seconda equazione cardinale della dinamica si conserva la componente del momento delle quantità di moto $\boldsymbol{K}_A$ rispetto ad A nella direzione $\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x \wedge \boldsymbol{e}_y$.

Per calcolare l'energia meccanica, iniziamo dall'energia cinetica che consta del contributo del telaio e di quello del punto P. Per il telaio, occorre servirsi dell'espressione

$$T_t = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{I}_A \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 I_{A,\boldsymbol{e}_z}$$

dove $I_{A,\boldsymbol{e}_z}$ è il momento di inerzia del telaio rispetto all'asse passante per A e diretto lungo $\boldsymbol{e}_z$. I contributi dei cateti AB ed AC si determinano osservando che A è un loro estremo per cui

$$I^{AB}_{A,\boldsymbol{e}_z} = \frac{1}{3}9m\ell^2 = 3m\ell^2 \qquad I^{AC}_{A,\boldsymbol{e}_z} = 32m\ell^2.$$

Per l'ipotenusa occorre applicare il teorema di Huygens-Steiner osservando che la distanza tra il punto medio dell'ipotenusa BC ed A è pari a $5\ell/2$, essendo ABC rettangolo e quindi inscrivibile in una semicirconferenza. Abbiamo allora

$$I^{BC}_{A,\boldsymbol{e}_z} = \frac{25}{4}m\ell^2 + 3m\frac{25}{4}\ell^2 = 25m\ell^2.$$

Abbiamo pertanto

$$I_{A,\boldsymbol{e}_z} = 60m\ell^2 \qquad \text{e} \qquad T_t = 30m\ell^2\dot{\vartheta}^2.$$

Per il calcolo dell'energia cinetica T_P del punto P, fissiamo una base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ solidale al telaio, con $\boldsymbol{e}_1 = \frac{C-A}{|C-A|}$ e $\boldsymbol{e}_2 = \frac{B-A}{|B-A|}$, cosicché $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_z$. Inoltre, siccome

$$B - C = (B - A) - (C - A) = 3\boldsymbol{e}_2 - 4\boldsymbol{e}_1,$$

il versore associato a $B - C$ è

$$\boldsymbol{e}_3 := \frac{3}{5}\boldsymbol{e}_2 - \frac{4}{5}\boldsymbol{e}_1$$

e dunque

$$P - A = 4\ell\boldsymbol{e}_1 + s\boldsymbol{e}_3.$$

Siccome la base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ ruota con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, grazie alle formule di Poisson abbiamo

$$\boldsymbol{v}_P = 4\ell\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_2 + \dot{s}\boldsymbol{e}_3 - s\dot{\vartheta}\left(\frac{3}{5}\boldsymbol{e}_1 + \frac{4}{5}\boldsymbol{e}_2\right)$$

ovvero, ragguppando i termini simili,

$$\boldsymbol{v}_P = -\left(\frac{4}{5}\dot{s} + \frac{3}{5}s\dot{\vartheta}\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(4\ell\dot{\vartheta} + \frac{3}{5}\dot{s} - \frac{4}{5}s\dot{\vartheta}\right)\boldsymbol{e}_2$$

da cui ricaviamo

$$T_P = m\left[16\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \dot{s}^2 + s^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{8}{5}\left(3\ell\dot{s}\dot{\vartheta} - 4\ell s\dot{\vartheta}^2 - \frac{3}{5}s\dot{s}\dot{\vartheta}\right)\right]$$

e dunque

$$T = m\left[46\ell^2\dot\vartheta^2 + \dot s^2 + s^2\dot\vartheta^2 + \frac{8}{5}\left(3\ell\dot s\dot\vartheta - 4\ell s\dot\vartheta^2 - \frac{3}{5}s\dot s\dot\vartheta\right)\right]$$

L'energia potenziale è quella della forza elastica $\frac{k}{2}AP^2$ e per determinare AP possiamo ricorrere al teorema di Carnot applicato al triangolo ACP, osservando che l'angolo in C ha coseno pari a $\frac{4}{5}$, per come è formato il telaio: dunque

$$V = \frac{k}{2}\left(16\ell^2 + s^2 - \frac{32}{5}\ell s\right).$$

Viste le condizioni iniziali, il valore costante dell'energia meccanica $E = T + V$ è pari a $E = \frac{53}{10}k\ell^2$ e quindi la conservazione impone che, ad ogni istante, sia

$$m\left[46\ell^2\dot\vartheta^2 + \dot s^2 + s^2\dot\vartheta^2 + \frac{8}{5}\left(3\ell\dot s\dot\vartheta - 4\ell s\dot\vartheta^2 - \frac{3}{5}s\dot s\dot\vartheta\right)\right] + \frac{k}{2}\left(s^2 - \frac{32}{5}\ell s\right) = -\frac{27}{10}k\ell^2. \tag{4.7}$$

Passiamo ora al calcolo del momento delle quantità di moto $\boldsymbol{K}_A$ rispetto al punto fisso A, osservando che anche in questo caso vi sarà il contributo del telaio ABC e quello del punto P. Per il primo contributo, basta ricordare che

$$\boldsymbol{K}_A^{(t)} = \mathbb{I}_A\boldsymbol{\omega} = I_{A,z}\dot\vartheta\boldsymbol{e}_z = 60m\ell^2\dot\vartheta\boldsymbol{e}_z.$$

Servendosi dell'espressione di $\boldsymbol{v}_P$, nonché di quella di $\boldsymbol{e}_3$ in funzione di $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$ possiamo verificare che il contributo del punto P è

$$\boldsymbol{K}_A^{(P)} = (P - A)\wedge 2m\boldsymbol{v}_P = 2m\left[16\ell^2\dot\vartheta + \frac{12}{5}\ell\dot s - \frac{32}{5}\ell s\dot\vartheta + s^2\dot\vartheta\right]\boldsymbol{e}_z$$

e quindi

$$\boldsymbol{K}_A = 2m\left[46\ell^2\dot\vartheta + \frac{12}{5}\ell\dot s - \frac{32}{5}\ell s\dot\vartheta + s^2\dot\vartheta\right]\boldsymbol{e}_z :$$

Poiché il sistema è in quiete all'istante $t = 0$, si ha $\boldsymbol{K}_A(0) = \mathbf{0}$ e quindi, a tutti gli istanti, si ha

$$46\ell^2\dot\vartheta + \frac{12}{5}\ell\dot s - \frac{32}{5}\ell s\dot\vartheta + s^2\dot\vartheta = 0. \tag{4.8}$$

Indichiamo con $\dot\vartheta_f$ e $\dot s_f$ i valori di $\dot\vartheta$ e $\dot s$ all'istante in cui P passa per il punto medio dell'ipotenusa BC e dunque $s = \frac{5}{2}\ell$. Dall'equazione (4.8) ricaviamo

$$\dot s_f = -\frac{725}{48}\ell\dot\vartheta_f$$

che, sostituito in (4.7) fornisce

$$\dot\vartheta_f = \pm\frac{12}{725}\sqrt{129}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

e quindi

$$\dot s_f = \mp\frac{\sqrt{129}}{4}\ell\sqrt{\frac{k}{m}}.$$